অধ্যাপক গোবিন্দ পদ পাল

অংক শেখা ও শেখানো

the methods of teaching mathematics

কলকাতা, বর্দ্ধমান, উত্তরবঙ্গ, কল্যাণী, বিশ্বভারতী ও যাদবপুর প্রভৃতি বিশ্ববিদ্যালয়ের বি. এড
পাঠক্রম অনুযায়ী লিখিত

অংক শেখা ও শেখানো

[A TEXT BOOK ON THE METHODS OF TEACHING MATHEMATICS]

শ্রীগোবিন্দ পদ পাল এম. এস. সি., এম এ., বি-টি

অধ্যাপক গোপালচন্দ্র মেমোরিয়াল কলেজ অফ্ এডুকেশন, নব-বারাকপুর, প্রাক্তন অধ্যাপক ফকিরচাঁদ কলেজ, ডায়মণ্ডহারবার (শিক্ষাতত্ত্ব বিভাগ), অধ্যাপক মুরলীধর গার্লস কলেজ, কলিকাতা, অধ্যাপক যাদবপুর বিদ্যাপীঠ কলেজ অফ্ এডুকেশন, যাদবপুর, প্রধান শিক্ষক, ব্যাঁটরা পাবলিক লাইব্রেরী শিক্ষা নিকেতন (বালক বিভাগ), হাওড়া, কোতরং আদর্শ-বিদ্যালয়, হুগলী, শিক্ষক, ভদ্রকালী উচ্চ-বিদ্যালয়, হুগলী।

জে. এন. ঘোষ এণ্ড সন্স.
৬, বঙ্কিম চ্যাটার্জী ষ্ট্রীট
কলিকাতা—৭০০০১২

১ম সংস্করণ অক্টোবর—১৯৭৪

মূল্য—১৫·০০ টাকা

শ্রীশক্তিপদ ঘোষ, জে. এন. ঘোষ এ্যাণ্ড সন্স্, ৬নং বঙ্কিম চ্যাটার্জি ষ্ট্রীট, কলিকাতা—৭০০০১২ হইতে প্রকাশিত ও শ্রীপরাণ চন্দ্র রায়, সনেট প্রিন্টিং ওয়ার্কস, ১৯, গোয়াবাগান ষ্ট্রীট, কলিকাতা—৭০০০০৬ হইতে মুদ্রিত।

ভূমিকা

J. J. Findlay-র ভাষায় "Education, to those who give their lives to it, is a joyous adventure just because the teacher is ever a learner." এই জন্যই আমার বইটির নাম দিয়েছি "অংক শেখা ও শেখানো"। বইটিতে ক'লকাতা ও অন্যান্য বিশ্ববিদ্যালয়ের বি. এড কোর্সের গণিত-শিক্ষণ পাঠক্রমকে অনুসরণ করার চেষ্টা করেছি। বি. এড্ পাঠক্রমে না থাকলেও শিক্ষক হিসেবে বিদ্যালয় স্তরে প্রবর্তিত গণিতের নতুন পাঠক্রম ও তার শিক্ষাপদ্ধতি জানার প্রয়োজন আছে ভেবেই এই বইটিতে বিদ্যালয়ের গণিত পাঠক্রম-এর কয়েকটি নতুন বিষয় ও তার শিক্ষাপদ্ধতি আলোচনা করেছি। বিষয়বস্তু সংক্রান্ত গণিতের সমগ্র পাঠক্রম আলোচনা না ক'রে গণিতের মূলনীতির সংঙ্গে যেগুলি বিশেষ ভাবে জড়িত সেগুলির ওপরেই বেশী জোর দিয়েছি।

এই বই এর বৈশিষ্ট্য হ'ল বিদ্যালয়ের নতুন পাঠক্রম অনুসরণ, পদ্ধতির বৈচিত্র্য ও নতুন প্রতীকের প্রয়োগ, পদ্ধতি ভিত্তিক প্রচুর পাঠ-পরিকল্পনা, **Discrete Mathematics** এর স্বরূপ ও তার শিক্ষাপদ্ধতির আলোচনা, চিত্রসহ গণিত-শিক্ষা-প্রদীপণের উপস্থাপন এবং প্রতিটি বিষয়ের উদাহরণ সহ ব্যাপক আলোচনা।

এই বই প্রকাশনে প্রথম উৎসাহ পেয়েছি আমার শ্রদ্ধেয় অধ্যাপক ও ক'লকাতা বিশ্ববিদ্যালয়ের শিক্ষাতত্ত্ব বিভাগের রীডার শ্রীযোগেশ চন্দ্র চক্রবর্তী মহাশয়-এর কাছে। সেই উৎসাহকে বর্দ্ধন ক'রেছেন আমার অগ্রজসম অধ্যাপক শ্রী তরুণরঞ্জন মজুমদার মহাশয়। যাঁদের সাহায্য ও পরামর্শ না পেলে এই বই লিখতে পারতাম না, তাঁরা হ'লেন ক'লকাতা বিশ্ববিদ্যালয়ের শিক্ষাতত্ত্ব বিভাগের রীডার অধ্যাপক শ্রীকালীশঙ্কর গুপ্ত, অধ্যাপক শ্রীভুজঙ্গভূষণ ভট্টাচার্য্য, ডেভিড্ হেয়ার ট্রেনিং কলেজের অধ্যাপক শ্রীসত্যেন্দ্রনাথ গিরি, বেলুড় রামকৃষ্ণ মিশন শিক্ষণ মন্দিরের অধ্যাপক শ্রীপরিমলবিকাশ বিশ্বাস ও অধ্যাপক শ্রীকার্তিক কুমার কুণ্ডু এবং সেন্ট জেভিয়ার্স কলেজ (বি. এড বিভাগ) ও যাদবপুর বিদ্যাপীঠ কলেজ অফ্ এডুকেশনের অধ্যাপক শ্রী দীনবন্ধু মুখোপাধ্যায়।

বইটি রচনা করার সময় যে সমস্ত প্রামাণ্য ইংরাজী ও বাংলা পুস্তকের সাহায্য নিয়েছি, স্থানাভাবে তাঁদের নাম উল্লেখ না করলেও সেই সব পুস্তকের লেখকদের কাছে আমি আমার ঋণ ও কৃতজ্ঞতা স্বীকার করছি।

প্রকাশকের পক্ষে শ্রী শক্তিপদ ঘোষ মহাশয় বইখানি স্বল্প সময়ের মধ্যে প্রকাশ করার জন্য যেরূপ পরিশ্রম করেছেন তার জন্য তাঁকেও আমার আন্তরিক ধন্যবাদ জানাচ্ছি।

সতর্কতা সত্ত্বেও কিছু কিছু ছাপার ভুল থেকে যেতে পারে—যেগুলি শুদ্ধ ক'রে নেবার জন্য পাঠক-পাঠিকার কাছে অনুরোধ জানাচ্ছি।

পরিশেষে, আমি আশা করছি সমগ্র শিক্ষক-সমাজে এই পুস্তকটি সমাদৃত হবে। পুস্তকের সমৃদ্ধি ও উৎকর্ষের জন্য কোন প্রকার উপদেশ বা বক্তব্য আমি সাদরে গ্রহণ ও বিবেচনা করতে রাজী আছি।

গোপালচন্দ্র মেমোরিয়াল
কলেজ অফ্ এডুকেশন
নব-বারাকপুর
২৪ পরগণা
১১ই অক্টোবর, ১৯৭৪

ইতি—
গোবিন্দ পদ পাল

B. ED. SYLLABUS OF MATHEMATICS
CALCUTTA UNIVERSITY

Methods : Aims and values of teaching Mathematics in Schools. General methods of approach—analytic and synthetic, inductive and deductive. Place of concretisation in mathematics, Place of History of Mathematics in the teaching of the subject. Relation between Arithmetic, Algebra and Geometry, Correlation of Mathematics with other subjects and life situations. Organisation of work in the class-room and in the School. Practical work and use of appliances in connection with the teaching of Mathematics, Curriculum and syllabuses. Evaluation of teaching and pupils, work, Teacher's preparation and planning.

Arithmetic : Methods of teaching ; Concept of number, the first four rules, vulgar and decimal fractions including recurring decimal, extraction of square root, ratio and proportion, metric system, checks and rough estimates in arithmetic. Solution of problems of various arithmetical operations, Application of algebra to arithmetic.

Elements of Statistics : when and how to introduce

Algebra : Scope and functions. Symbolism, generalisation, fundamental laws and functionality. Methods of teaching: directed numbers, formulae, factors, fractions, equation, irrational numbers, indices, surds, involutions and evolutions, A.P.,G.P. variations, logarithms, problems, graphs, theory of quadratic equations and expressions, permutations and combinations, binomial theorem with positive integral index, elementary idea of some of the infinite geometric series, exponential and logarithmic series.

Geometry : Early teaching of Geometry. Place of intuition, observation and experience Geometrical concepts. Simple practical exercises in early stages. Experimental, analytic and synthetic stages and the principles of their treatment. Standard theorems and riders.

Algebra in Geometry. Origin and development of Geometry Euclidean and non-Euclidean Geometry.

Place of solid geometry and methods of teaching it. Methods of teaching mensuration.

Teaching of the fundamental principles of Trigonometry and Co-ordinate Geometry : how and when to introduce them in Schcol Mathematics.

Contents : Candidates will be required to have enough knowledge of the course contents of School Mathematics to be able to teach the subject competently.

[Vide : Notification, Dated 6.6.74. from the Secretary C. U. (Ats) to different training Colleges.

Extract of the resolution passed in the meeting of the Post-Graduate Studies in Education :]

"The Content portion in different method Subjcets should relate to the new syllabus of the respective school subjects, provided for Secondary Schools."

B. ED. SYLLABUS OF MATHEMATICS

(Jadavpur University)

Methods :

General : Aims and values of teaching Mathematics in schools. The practical, cultural and outlook values General methods of approach—analytic and synthetic inductive and deductive. Pragmatic approach in teaching Mathematics. Correlation between arithmetic, algebra and geometry. Correlation between mathematics and other school subjects.

Place of concretisation in the teaching of Mathematics. Place of history and philosophy of mathematics in teaching Organization of work in the classroom and outside the classroom. Mathematics room and appliances.

Mathematics syllabus. Mathematics of citizenship. Evaluation of teaching and pupil's work.

Arithmetic :

The beginnings—motivation, concept of number, numeration, notation.

First Four Rules. Vulgar and decimal fractions. Metric sums and problems.

Teaching of the main principles and operations of school arithmetic including elements of statistics.

Place of mental arithmetic, checks and rough estimates in teaching.

Algebra :

Scope and functions ; symbolism, generalization. Fundamental laws and functionality.

General methods of approach : "First Four Rules" "Problems" and "Formula" methods of approach compared.

Teaching of the main principles and operations of algebra.

Geometry :

Early teaching of geometry : place of intuition, observation and practical experience. Geometrical concepts. Approach to teaching in three broad stages—experimental, deductive and systematising, and their significance. Drawbacks of Euclid's presentation.

Standard theorems and riders. Synthetic and analytic treatment of propositions.

Origin and development of geometry. Euclidean and non-Euclidean geometry.

Place of solid geometry in teaching. Teaching of mensuration.

Teaching of the fundamental principles of trigonometry, and co-ordinate geometry—how and when to introduce them.

Contents :

Candidates will be required to have sufficient knowledge of course-contents of School Mathematics to be able to teach the subject competently.

কোন্ পাতায় কি আছে?

॥ প্রথম পর্য্যায় ॥

বিষয় পৃষ্ঠাঙ্ক

॥ দ্বিতীয় পর্য্যায় ॥

বিষয় পৃষ্ঠাঙ্ক

অংক শেখা ও শেখানো

॥ প্রথম অধ্যায় ॥ অংকশাস্ত্র—স্বরূপ, পরিধি ও কার্যাবলী (Nature, Scope and Functions of Mathematics)

ভূমিকা

অংকশাস্ত্র তথা গণিত আমাদের প্রাত্যহিক জীবনের সঙ্গে সম্পর্কযুক্ত এক অতিপ্রয়োজনীয় বিষয়। গণিত সভ্যতার মেরুদণ্ড হিসাবে পরিচিত। **গণিতের অনুপস্থিতিতে আমাদের পার্থিব সভ্যতার বিনাশ অনিবার্য।**

ব্যুৎপত্তিগত অর্থ

ইংরেজী Mathematics শব্দটি এসেছে গ্রীক শব্দ mathein থেকে যার অর্থ হলো 'শিক্ষা করা' ; আবার অনেকে বলেন Mathemathics শব্দটির উৎস হলো গ্রীক শব্দ mathemata, যার অর্থ হ'লো **শিক্ষণীয় বিষয়**। গ্রীকেরা গণিতকে এই ভাবে এক ব্যাপক ও গভীর অর্থে দেখেছিলেন। প্রাচীন গ্রীসে সংখ্যা ও বিভিন্ন মাত্রার আকার (figures in space) ছাড়াও জ্যোতির্বিদ্যা, সংগীত প্রভৃতিও গণিত-শাস্ত্রের অন্তর্ভুক্ত ছিল। তাই গণিত হলো **সংগীত ও কাব্যের মত মানসিক চিন্তাধারার ফলশ্রুতি।**

মানসিক চিন্তাধারার ফলশ্রুতি

গণিতের বাস্তবতা পার্থিব জগৎ বা পারিপার্শ্বিক পরিবেশের ওপর নির্ভরশীল নয়। গণিতজ্ঞের প্রথম কর্তব্যই হলো, অন্যান্য শিল্পী বা কবির মত **উপস্থাপন** (Representation) এবং **ব্যাখ্যার** (Interpretation) মাধ্যমে মানুষের মনের দিগন্তরেখাকে বিস্তৃত করা। তবুও একথা নিঃসন্দেহে বলা যায়, এই জটিল ও রহস্যময় গণিতের সাহায্যেই বিজ্ঞান ইন্দ্রিয়ানুভূতির সঙ্গে চরম বাস্তবতার যোগসূত্র স্থাপনে সক্ষম হয়েছে। সেই গণিতচরিত্রবিশিষ্ট বিজ্ঞান হলো পদার্থবিদ্যা, রসায়নবিদ্যা ও জ্যোতির্বিদ্যা। তাই গণিত হ'লো পার্থিব ও অপার্থিব জগতের মধ্যে **যোগসূত্র স্থাপনকারী বিজ্ঞান**।

পার্থিব ও অপার্থিব জগতের যোগসূত্র স্থাপন

গণিতজ্ঞের ভাষায়—"Mathematics is a type of thought, a body of results—so essentially characteristic of human mind, so little influenced by environment, so uniformly present in every civilization."

গণিত এমনই এক শাস্ত্র যার মধ্য দিয়ে **তথ্যগুলি শিক্ষার্থীর কাছে অত্যন্ত সরল ভাবে রাখা হয়,** যাতে তারা সহজেই অবস্থাকে আয়ত্ত করতে পারে। তথ্য ও অবস্থা আয়ত্তাধীন হলেই শিক্ষার্থী তা থেকে অনুমানের মাধ্যমে সিদ্ধান্তে উপনীত হতে পারে। তাই গণিত হলো, "more than a mere accumulation of technical knowledge, it is a mode of thought". এই ধরনের চিন্তাধারায় শিক্ষার্থীদের সক্রিয় অংশ গ্রহণ করতে সুযোগদান করাই গণিত-শিক্ষকের অবশ্য কর্তব্য।

গণিতের সাধারণ সংজ্ঞা

॥ বিষয় হিসাবে গণিতের কয়েকটি বৈশিষ্ট্য ॥

(Some characteristics of Mathematics)

(১) **নিশ্চয়তা** (Certainty) ঃ গণিতের সিদ্ধান্তগুলি **নৈর্ব্যক্তিক।** ব্যক্তিবৈষম্যের ফলে এর সিদ্ধান্তের কোন রকম পরিবর্তন হয় না। এখানে বিশেষজ্ঞের মতামতের কোন স্থান নেই। প্রত্যেকের নিজের গাণিতিক সিদ্ধান্তের নিশ্চয়তার দাবী করার অধিকার রয়েছে কেননা প্রতিটি সিদ্ধান্ত নির্ভুল। তাই গণিত এমনই এক বিষয় যার সিদ্ধান্ত ভুল কি শুদ্ধ শিক্ষার্থীরা নিশ্চিতভাবে বুঝতে পারে।

বৈশিষ্ট্য : নিশ্চয়তা

(২) **সরলতা বা অকৃত্রিমতা** (Simplicity) ঃ গাণিতিক যুক্তি অত্যন্ত সরল। অল্প সংখ্যক সরল সংজ্ঞা ও স্বতঃসিদ্ধের ওপর ভিত্তি করে ধীরে ধীরে যথাযথ ধাপে গণিত আমাদের কঠিন থেকে কঠিনতর সিদ্ধান্তের দিকে নিয়ে যায়। যার ফলে গণিতশিক্ষক প্রতি ধাপে শিক্ষার্থীর দক্ষতা ও প্রয়োজনের উপযোগী ক'রে গাণিতিক সমস্যাগুলি উপস্থাপন করতে পারেন, যেটি অন্যান্য বিষয়ে সম্ভব নয়।

সরলতা

(৩) **প্রয়োগশীলতা** (Applicability) ঃ Benjamin Peirce-এর মতে "Mathematics is the science of necessary conclusions" অর্থাৎ **প্রয়োজনীয় সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়ার** সাহায্য করে যে বিজ্ঞান তারই নাম গণিত। অনেকে মনে করেন, গাণিতিক সিদ্ধান্তের দক্ষতা বাস্তব জীবনে প্রযোজ্য নয়। গাণিতিক সিদ্ধান্তের নির্ভুলতা প্রারম্ভিক সূত্রের সত্যতার ওপর নির্ভরশীল। কিন্তু বাস্তব জীবনের সিদ্ধান্তের পেছনে রয়েছে কল্পনাশক্তির প্রভাব।

প্রয়োগশীলতা

যেমন, ধরা যাক, আমাদের প্রারম্ভিক সূত্র "সূর্য এ পর্যন্ত প্রতিদিন সকালে উঠেছে। কোনদিন এর ব্যতিক্রম হয়নি।" সাধারণ বুদ্ধিতে সিদ্ধান্তে আসা যায় যে "আগামীকাল সকালে সূর্য উঠবে।" কিন্তু প্রদত্ত প্রারম্ভিক সূত্র থেকে এরূপ অবশ্যম্ভাবী সিদ্ধান্ত গণিতে করা যায় না। গণিতের দিক থেকে **প্রারম্ভিক সূত্র ও সিদ্ধান্তের মধ্যে যথেষ্ট ফাঁক রয়েছে।** ওপরের উদাহরণটিতে বাস্তব অবস্থা এই যে, সূর্য আগামীকাল নাও উঠতে পারে বা থাকতে পারে। এই সিদ্ধান্তকে গণিতশাস্ত্রসম্মত করতে হলে নিম্নের শর্তগুলিকে সিদ্ধ করতে হবে:

যেমন, (১) সূর্য আগামীকাল পর্যন্ত থাকবে
(২) পৃথিবীও আগামীকাল পর্যন্ত থাকবে
এবং (৩) পৃথিবী তার অক্ষপথে ঘুরবে।

প্রারম্ভিক সূত্র, অনুমিত স্বীকার ও গাণিতিক সিদ্ধান্ত।

সুতরাং **প্রারম্ভিক সূত্র এবং জানা তথ্য বা অনুমিত স্বীকারের (hypothetical conditions) সংযোগে গাণিতিক সিদ্ধান্তে উপনীত হতে হয়।** বাস্তব অবস্থার সঙ্গে অনুমিত সূত্র যেখানে খাপ খাবে গাণিতিক সিদ্ধান্ত সেখানে নিশ্চিত, ফলপ্রদ ও নির্ভুল। তাই গাণিতিক পদ্ধতি বাস্তব জীবনে ভালোভাবেই প্রয়োগ করা যেতে পারে।

Russell-এর সংজ্ঞা

বিখ্যাত গাণিতিক Russell এর মতে **"Mathematics may be defined as the subject in which we never know what we are talking about, nor whether what we are saying is true".** অর্থাৎ গণিত এমনই এক বিষয় যার মাধ্যমে আমাদের বক্তব্য বিষয়ের অস্তিত্ব ও সিদ্ধান্তের সত্যতা সম্পর্কে জানতে পারি না।

॥ রাসেলের সংজ্ঞার ভালদিক ॥

(১) সংজ্ঞাটি সাধারণ বুদ্ধির মূল্যকে বর্জন করেছে,
(২) গণিতের চরিত্রকে করেছে বিমূর্ত,
(৩) গণিতের স্বতঃসিদ্ধমূলক চরিত্রকে প্রস্তাবিত করেছে,
এবং (৪) গণিতকে সংখ্যা, পরিমাণ ও পরিমাপের বিজ্ঞান হিসাবে গ্রহণ করতে অস্বীকার করেছে।

Peirce-এর মতো Russell-ও বলেছেন, "Pure Mathematics consists entirely of such asseverations as that, if such a proposition is true of anything, then such another proposition is true." (অর্থাৎ গণিত এমন কতকগুলি কথিত বাক্য দ্বারা গঠিত, যাতে কোন সত্য তথ্য যদি আর একটি তথ্যের ওপর নির্ভরশীল হয় তাহলে দ্বিতীয় তথ্যটিও সত্য হবে।)

রাসেলের যুক্তিভিত্তিক ব্যাখ্যা

কিন্তু গণিতের ক্ষেত্রে এধরনের **যুক্তিভিত্তিক উপস্থিতি** অনেকেই সমর্থন করেন না। গণিতের ক্ষেত্রে আরও অকাট্য ও নির্ভুল যুক্তির প্রয়োজন। একজন যুক্তিবিদ্যাবিশারদ তার যুক্তিবিদ্যার সামগ্রিক দক্ষতার জন্য একজন গ্রহণযোগ্য গণিতজ্ঞ হতে পারেন না।

এই মূল্য নিরূপণ বা মূল্যায়নকে বর্জন করলেন জার্মান গণিতজ্ঞ Klein। তখন উনবিংশ শতাব্দীর শেষভাগ। Klein-এর মতে Mathematics in general, is fundamentally the science of self-evident things," অর্থাৎ সাধারণ ভাবে গণিত একটি **স্বতঃসিদ্ধমূলক** বা **স্ব-প্রকল্পভিত্তিক বিজ্ঞান**।

স্বতঃসিদ্ধমূলক বিজ্ঞান

কিন্তু গণিত আবার স্বতঃসিদ্ধ বা স্ব-প্রকল্প বস্তু সম্পর্কেও সন্দিগ্ধ। এই স্বতঃসিদ্ধ বস্তুগুলি হ'ল সাধারণতঃ সংজ্ঞা, অনুসিদ্ধান্ত ও স্বতঃসিদ্ধের ওপর আমাদের **প্রাথমিক ধারণা**। প্রমাণ ছাড়াই আমরা এদের গ্রহণ করি।

প্রাথমিক ধারণা

প্রমাণবিহীন স্বতঃসিদ্ধকেও পরে অস্বীকার করা হ'ল। কারণ এগুলির বেশীরভাগই **জ্যামিতিক স্বজ্ঞা** (Geometrical Intuition) এবং বিশ্বাসযোগ্যও নয়। গ্রীকেরা এদের জ্যামিতিক অনুসিদ্ধান্ত রূপে বর্ণনা করেছেন। কারণ জ্যামিতির বিমূর্তভিত্তিকে তাঁরা বিশ্বাস করেন না। গ্রীকদের কাছে জ্যামিতি হ'ল **'স্থানের বিজ্ঞান'** (Science of Space)। এই স্থান হ'ল অভিজ্ঞতাভিত্তিক পার্থিব স্থান যেখানে আমরা বাস করি। কিন্তু এই স্থান সম্পর্কে জ্যামিতির করণীয় কিছুই নেই। ইউক্লিড-জ্যামিতির স্থান সম্পর্কীয় ধারণা তার নিজস্ব সৃষ্টি। পৃথিবীর অন্য কোথাও এই ধরণের স্থানের উল্লেখ নেই।

জ্যামিতিক স্বজ্ঞা

জ্যামিতি স্থানের বিজ্ঞান

দার্শনিক Kant-এর মতে "Geometrical axioms were synthetic

or a-priori intuitions, 'অর্থাৎ জ্যামিতিক স্বতঃসিদ্ধগুলি **সংশ্লেষণী বা অভিজ্ঞতা-পূর্ব সজ্ঞা**। তাঁর মতে দেশ ও কালের ধারণা শুধু 'স্বজ্ঞা' নয়—এটি অভিজ্ঞতা-পূর্ব স্বজ্ঞা। এই ধারণাগুলো সব প্রত্যক্ষকারীর কাছে সব সময়ই একই রূপ থাকে ব'লে Kant গাণিতিক প্রতিজ্ঞাকে **আবশ্যিক** (necessary) এবং **সার্বজনীন** (universal) আখ্যা দিয়েছেন।

সংশ্লেষণী বা অভিজ্ঞতাপূর্ব স্বজ্ঞা

কিন্তু আমাদের জাগতিক জ্ঞান অন্য মত পোষণ করে। তখন কি তারা **পরীক্ষামূলক সত্য** (Experimental truths)? কিন্তু তা নয়। কারণ আমরা পরীক্ষা নির্দিষ্ট ও আদর্শপথে করি না। আমরা শুধু তাদের পার্থিব বস্তুতে পরিণত করি। আবার জ্যামিতিকে পরীক্ষামূলক বিজ্ঞান হিসাবে ধরলেও যথার্থ বিজ্ঞানে পরিণত হ'ত না। তখন জ্যামিতিকে বিজ্ঞানের রীতি-অনুযায়ী ক্রমাগত পরিবর্তন করার প্রয়োজন হ'ত।

জ্যামিতি পরীক্ষামূলক বিজ্ঞান?

সুতরাং স্বতঃসিদ্ধগুলি সংশ্লেষণী বা অভিজ্ঞতা-পূর্ব স্বজ্ঞা নয়, পরীক্ষামূলক সত্যও নয়। এগুলি **প্রচলিত** ধারণামাত্র।

প্রচলিত ধারণা

তাই গণিতের প্রকৃতি রহস্যময়, জটিল ও দুর্বোধ্য। মোটামুটি সর্বজনগ্রাহ্যরূপে গণিত সম্পর্কে প্রচলিত ধারণাগুলি নিয়ে দেওয়া গেল।

গণিতের প্রকৃতি :

(ক) ধারণাগুলি **ব্যক্তিনিরপেক্ষ** ও **পরিমাণধর্মী**।

(খ) পদ্ধতিগুলি **যুক্তি ও বিচারমূলক, প্রতীকমূলক, সুষ্ঠু ও সুনির্দিষ্ট চিন্তা ও ধারণা সাপেক্ষ এবং সুস্পষ্ট**।

(গ) **নির্ভুলতা, নিশ্চয়তা ও প্রয়োগধর্মিতা**—এর বৈশিষ্ট্য।

(ঘ) **সিদ্ধান্তগুলি অভিনব**।

(ঙ) প্রণালীর ভাষা ও চিন্তাধারার ব্যবহার **সংক্ষিপ্ত** ও **দ্ব্যর্থহীন**।

(চ) **বৌদ্ধিক উৎকর্ষের** ওপর নির্ভরশীল।

(ছ) ব্যক্তিগত ইচ্ছা, আকাঙ্ক্ষা ও আবেগের ওপর নির্ভরশীল নয়।

(জ) প্রকৃতি একদিকে **সংশ্লেষণাত্মক** ও **বিশ্লেষণাত্মক**, অপরদিকে **আরোহ** ও **অবরোহ-ধর্মী**।

(ঝ) **অভিজ্ঞতা, অনুমান, যুক্তিতর্ক ও প্রতীকের মধ্যে ঘটেছে সমন্বয়**, যার অপর নাম "New Mathematics"।

মাধ্যমিক বিদ্যালয়ের পাঠক্রমের দিকে লক্ষ্য রেখে বলা যায় যে, গণিত সংখ্যা, প্রতীক, বিভিন্ন মাত্রিক আকার, গতি ও কালের বিজ্ঞান। সুতরাং গণিত-বিজ্ঞান যেমন **বিমূর্ত** তেমনি **মূর্ত**।

গণিত-বিজ্ঞান—বিমূর্ত ও মূর্ত

॥ গণিতের পরিধি ও কার্যাবলী ॥

Roger Bacon-এর মতে "Mathematics is the gateway to all Sciences "অর্থাৎ **গণিত সমস্ত বিজ্ঞানেরই প্রবেশদ্বার।** Percy Nunn-এর মতে "Mathematics is an instrument of material Conquest" অর্থাৎ গণিত **মহাজাগতিক ও পার্থিব রহস্য উদঘাটনের যন্ত্রবিশেষ।** Comte বলেছেন, All Scientific education which does not commence with mathematics, is of necessity, defective at its foundation" অর্থাৎ **গণিতের সাহায্য ব্যতিরেকে বিজ্ঞান শিক্ষার ভিত্তি সুদৃঢ় হতে পারে না।** Kothari Commission তাঁদের রিপোর্টে উল্লেখ করেছেন—"We cannot overstress the importance of mathematics in relation to science, education and research. This has always been so, but at no time has the significance of mathematics been greater than to-day............it is important that deliberate effort is made to place India on the 'world map of mathematics' within the next two decades or so."

গণিত সম্পর্কে বিভিন্ন মত

সুতরাং গণিত একটি **বহু ব্যাপক শাস্ত্র**। জ্ঞান-বিজ্ঞানের প্রায় প্রতিটি ক্ষেত্রেই গণিতের প্রয়োগ হচ্ছে। এমন কি **সামাজিক ও রাজনৈতিক** জীবন-যাপনের মধ্যেও গণিতের পরিধি বিস্তৃত হয়ে পড়েছে। মহাজাগতিক রহস্যের মধ্যে, মহাবিশ্বের অজানা ইতিহাস উদঘাটনের কাজে গণিত তার শাখা-প্রশাখা বিস্তার করে চলেছে আর তৈরী করছে গণিতের নব নব শাখা ও কার্যক্ষেত্র।

জ্ঞান-বিজ্ঞান, সামাজিক ও রাজনৈতিক ক্ষেত্র

এই ব্যাপকতা বহুযুগ-সঞ্চিত জ্ঞান ও অভিজ্ঞতার ফলেই সম্ভব হয়েছে। এমন একদিন ছিল যখন মানুষ শুধু মূর্ত বস্তুগুলি প্রত্যক্ষ করত। পরে

প্রয়োজনের তাগিদে সমাজবদ্ধ জীবনযাপনের জন্য পশুপালনের মাধ্যমে মানুষ ব্যবহার করল, সংখ্যা, পরিমাণ। **গড়ে উঠল সংখ্যাজ্ঞান, পরিমাণ-জ্ঞান, এবং পরিমাণগত পার্থক্যের জ্ঞান**। এইভাবে গণিতের পরিধিও ক্রমশঃ বাড়তে লাগল। স্বাভাবিক সংখ্যা তার গণ্ডী ছাড়িয়ে মূলদসংখ্যার সন্ধানে চলল। পীথাগোরাসের উপপাদ্য ও $\sqrt{2}$-এর ধারণা গণিতকে গতিশীল করে তুলল। এইভাবে প্রত্যক্ষ, অনুভব ও প্রয়োজনীয়তা থেকে **পাটীগণিতের হ'ল আবির্ভাব** আর দ্রুত এগিয়ে চলল **ক্রম বিকাশের পথে**।

পাটীগণিতের আবির্ভাব ও ক্রমবিকাশ

পাটীগণিতের ক্রমবিকাশের সঙ্গে সঙ্গে জ্যামিতি যেমন সমান তালে অগ্রসর হয়েছে, তেমনি জ্যামিতিতেও পাটীগণিতের অনুপ্রবেশ ঘটেছে। পাটীগণিত সম্প্রসারিত হয়ে **আবির্ভূত হ'ল বীজগণিত** এবং জ্যামিতি ও বীজগণিতের সংযোগে **গড়ে উঠল স্থানাঙ্ক জ্যামিতি**। এই সৃষ্টির মূলে ছিলেন Descartes। এইভাবে মহাবিশ্বের রহস্য আবিষ্কারের জন্য আইনষ্টাইন সৃষ্টি করলেন **নতুন গণিত**, ইউক্লিড জ্যামিতির কুসংস্কার দূর করে রীমান সৃষ্টি করলেন **অ-ইউক্লিডীয় জ্যামিতি** (Non-Enclidian Geometry)। এই জ্যামিতির সাহায্যেই টেবিলের ওপর একটি বৃত্ত এঁকেই ইউক্লিডের জ্যামিতির তত্ত্বগুলিকে ব্যাখ্যা করা যায়। ইউক্লিড তার বইয়ের ১ম খণ্ডের ৫ম স্বীকার্যে বলেছেন একটি প্রদত্ত সরলরেখার বহিঃস্থ কোন বিন্দু দিয়ে ঐ সরলরেখার সমান্তরাল একটিমাত্র রেখা টানা যায়। রীমান, "সব সরলরেখা পরস্পর ছেদ করে" এই সত্যকে বজায় রেখে টেবিলজ্যামিতির মাধমে ইউক্লিডকে ব্যাখ্যা ক'রে বিশুদ্ধ গণিতের পরিধিকে বিস্তৃত করেছিলেন।

বীজগণিত, স্থানাঙ্ক জ্যামিতি, Non-Euclid জ্যামিতির আবির্ভাব

বিশুদ্ধগণিতে আর একটা দিক হ'ল বিমূর্ত বীজগণিত ও তার ব্যবহার। এ ব্যাপারে George Boole, Peano, Ferge, Russell, Hilbert, Husserl প্রভৃতির নাম উল্লেখযোগ্য। বিমূর্ত বীজগণিতের ক্ষেত্রে এদের অবদান হ'ল ভাষা ও চিন্তাকে বীজগণিতীয় প্রতীক ও প্রণালীর সাহায্যে ব্যাখ্যা, যুক্তিবিজ্ঞানের সাহায্যে স্বাভাবিক ও অন্যান্য সংখ্যার **অমূর্ত বিশ্লেষণ** অর্থাৎ **বুদ্ধি ও চিন্তার রাজত্বে বীজগণিতের সম্প্রসারণ**।

বিমূর্ত্ত বীজগণিত

বীজগণিত ও জ্যামিতি ত্রিভুজের মধ্যে প্রযুক্ত হয়ে সৃষ্টি করল

ত্রিকোণমিতি, ঘন ও ত্রিমাত্রিক জ্যামিতি

ত্রিকোণমিতি। পাটীগণিত, বীজগণিত ও জ্যামিতির একত্র প্রয়োগে গড়ে উঠল **ঘন ও ত্রিমাত্রিক জ্যামিতি**।

বিশ্লেষণাত্মক গণিতের তত্ত্ব (Theroy of analysis of Calculas) আবিষ্কার গণিতের ক্রমবিকাশের পথকে আরো আলোকিত করে তুলল।

সূক্ষ্ম বিশ্লেষণাত্মক তত্ত্ব

এর মূলে ছিলেন, নিউটন ও লিবনিৎস। আইনষ্টাইন তার **'আপেক্ষিক তত্ত্বের'** সাহায্যে স্থানকালের গণিতকে আরও সম্প্রসারিত করলেন।

বর্তমানে গণিতের চারটে বিভাগ লক্ষণীয়ঃ (১) **পাটীগণিত** (২) **বীজগণিত** বা সাধারণ পাটীগণিত (৩) **জ্যামিতি** এবং (৫) **বিশ্লেষণাত্মক তত্ত্ব**। উচ্চশিক্ষার ক্ষেত্রে শাখাগুলির পৃথকীকরণ অপেক্ষা একীকরণের দিকে ঝোঁকটা বেশী।

গণিতের শ্রেণীবিভাগ

ব্যবহারিক দিক থেকে বিচার করলে জীবনের প্রায় প্রত্যেক স্তরেই গণিতের প্রয়োগ দেখতে পাই। **মূল্যায়নের যন্ত্র** হিসাবেও গণিতের ব্যবহার রয়েছে। কারণ গাণিতিক প্রতীকগুলির যথার্থতা, ব্যক্তিনিরপেক্ষতা, ধারাবাহিকতা প্রভৃতি ধর্মের জন্য এগুলি ব্যক্তিগত বা সামাজিক যে কোন গুণগত পরিমাপ বা মূল্যায়নের পক্ষে **নির্ভুল ও নির্ভরযোগ্য**। মনোবিজ্ঞানে ব্যক্তিগত প্রবৃত্তি, প্রবণতা, দক্ষতা প্রভৃতি মূল্যায়ন ও বিচারের ক্ষেত্রেও গণিত-এর ব্যবহার দেখতে পাওয়া যায়।

মূল্যায়নে গণিত

গণিত ও দর্শন ঘনিষ্ঠভাবে সম্পর্কযুক্ত। সমস্ত বড় বড় দার্শনিকই প্রায় গণিতজ্ঞ। দর্শন চরম বাস্তব বা সত্য নির্ণয় করে। গণিত নির্ভুল সিদ্ধান্তে উপনীত হতে সাহায্য করে। সুতরাং দর্শনকে চরম বাস্তবের লক্ষ্যে উপনীত হতে সাহায্য করতে গণিতই সর্বশ্রেষ্ঠ বিষয়।

গণিত ও দর্শন

গণিতজ্ঞ না হ'লে অর্থনীতির সূত্র আয়ত্ত করা যায় না। বর্তমান **অর্থনীতি পরিসংখ্যান ভিত্তিক**। তাছাড়া ব্যবসা-বাণিজ্যের আবর্তন, আমদানি রপ্তানির প্রবণতা, জাতীয় আয়-ব্যয়, জনসংখ্যার প্রবণতা প্রভৃতি নিরূপণে পরিসংখ্যান অপরিহার্য। জীবন-বীমা, ব্যাঙ্ক প্রভৃতি প্রতিষ্ঠানের কার্যাবলী পরিসংখ্যান, লেখচিত্রও গণিতের ওপর নির্ভরশীল।

গণিত ও অর্থনীতি

গণিতের প্রাকৃতিক সম্ভাবনার সূত্রটির প্রয়োগ দেখতে পাই **ভৌত বিজ্ঞান, জীববিজ্ঞান, সমাজবিজ্ঞান মনোবিজ্ঞান** প্রভৃতিতে। **চারুকলায়** রয়েছে জ্যামিতিক আকার ও প্রতিসাম্যের জ্ঞানের প্রয়োগ।

গণিত ওভৌতবিজ্ঞান, জীববিজ্ঞান, সমাজবিজ্ঞান নেনোবিজ্ঞান, চারুকলা

গণিত সমস্ত বিজ্ঞানেরই মেরুদণ্ড। পদার্থবিদ্যার যে কোন সূত্রকে গাণিতিক নিয়মে আবদ্ধ না করতে পারলে তা মানুষের কাজে আসবে না। তাই পদার্থবিদ্যা ও গণিত অঙ্গাঙ্গীভাবে জড়িত। তেমনি সমস্ত রাসায়নিক যৌগিক পদার্থই গাণিতিক সূত্রের দ্বারা আবদ্ধ। **বিজ্ঞানের দিক থেকে জীববিদ্যা, চিকিৎসাবিদ্যা, কারিগরী বিদ্যা** প্রভৃতিও **গণিতের ওপর কম নির্ভরশীল নয়।**

গণিত ও বিজ্ঞান

প্রশ্নাবলী

1 "Mathematies is more than a mere accumulation of technical knowledge ; it is a mode of thought, and the teacher should try to afford his pupils an opportunity of sharing in this kind of thinking, if only in a very simple and elementary way." Elucidate.

[C. U. B. Ed. '70]

2. Discuss the main characteristics of Mathematics and deduce a suitable definition of Mathematics.

3, "Mathematics in genral is fundamentally the science of self-evident things"—Justify.

4. "The Geometrical axioms are synthetic or a priori intuitions"—Do you agree ? Give reasons for your answer.

5. "No other school subject is so admirably adopted to a judicious mode of study as Mathematics"—Discuss.

[C. U. B. T. '53]

6. Discuss, in brief, the Scope and functions of Mathematics.

॥ দ্বিতীয় অধ্যায় ॥ বিদ্যালয়ে গণিত শিক্ষার উদ্দেশ্য ও মূল্য (Aims and Values of teaching Mathematics in school)

গণিতের প্রয়োজনীয়তা জানতে হ'লে আমাদের প্রথমেই জানতে হবে গণিতের লক্ষ্য ও উপযোগিতার বা উদ্দেশ্য ও মূল্যের মধ্যে পার্থক্য কোথায়?

লক্ষ্য ব' উদ্দেশ্য, উপযোগিতা বা মূল্য

কোন কাজ করার সময় মনের মধ্যে যে **চেতনামূলক বাসনা** (Conscious purpose) উপস্থিত হয় তারই নাম **লক্ষ্য বা উদ্দেশ্য**। **উপযোগিতা বা মূল্য** হ'ল **কাজ করার প্রকৃত ফলশ্রুতি**। লক্ষ্য ও উপযোগিতা হয়ত একই ধরণের নাও হতে পারে। একজন গণিতশিক্ষক যথেষ্ট জ্ঞান ও যোগ্যতা থাকা সত্ত্বেও যদি গণিত শিক্ষার প্রকৃত উদ্দেশ্যটি না জেনে শিক্ষা দান করেন, তাহ'লে তাঁর শিক্ষাদান হবে বিপথগামী এবং বিফল। তাই তাঁকে জানতে হবে উপযোগিতার পরিপ্রেক্ষিতে বিদ্যালয়ে গণিতশিক্ষার প্রকৃত লক্ষ্য বা উদ্দেশ্য।

বিদ্যালয়ে গণিত শিক্ষার **মূল উদ্দেশ্যগুলি** হ'ল—(১) যথাযথ **দক্ষতা অর্জন** (২) **মূল্যনির্ধারণের শক্তি অর্জন** এবং (৩) সঠিক **দৃষ্টিভঙ্গী গঠন**।

দক্ষতা অর্জন (Power of ability)

দক্ষতা ব'লতে সুস্পষ্ট ও সঠিক চিন্তার প্রকাশ, প্রদত্ত তথ্যের সঠিক সংব্যাখ্যান ও রীতি-অনুযায়ী সংগঠন, যুক্তিপূর্ণ সিদ্ধান্ত গঠন, সমস্যার বিশ্লেষণ ও মৌলিক সম্পর্ক নির্ণয়, মৌলিক চিন্তাধারার গঠন, স্বজ্ঞামূলক চিন্তা ও সাধারণ বুদ্ধির প্রয়োগের দক্ষতা অর্জন এবং বিশেষ বিশেষ ধারণার সঠিক সাধারণীকরণকেই বোঝায়।

মূল্য নির্ধারণ (Power to estimate)

মূল্য নির্ধারণের ক্ষেত্রগুলি হ'ল সমাজবিজ্ঞানে গণিতের অবদান, মানবসভ্যতা ও তার অগ্রগতিতে গণিতের প্রভাব, আধুনিক শিল্প ও ব্যবসা-বাণিজ্যে গণিতের বৃত্তিগত মূল্য, বিভিন্ন ক্ষেত্রে বৈজ্ঞানিক চিন্তাধারার উন্নয়নের সহায়ক হিসাবে গণিত, সমাজ জীবনে গাণিতিক প্রণালীর ব্যবহার, গণিতের কৃষ্টিগত মূল্য এবং অবসর সময় সদ্ব্যবহারের সহায়ক হিসাবে গণিত।

দৃষ্টিভঙ্গী বলতে রীতি অনুযায়ী ও যুক্তিপূর্ণভাবে কর্মসম্পাদনের অভ্যাস গঠন, সিদ্ধান্তে আসার জন্য যুক্তি ও বৈজ্ঞানিক চিন্তায় মানসিক শিক্ষণ, সঠিক ও ফলপ্রদ প্রকাশক্ষমতা গঠন, স্বাধীন ও মৌলিক চিন্তার দক্ষতা অর্জন, জ্ঞান অর্জন ও তার প্রয়োজন, আত্মবিশ্বাস ও বলিষ্ঠ ব্যক্তিত্ব গঠনকেই বোঝায়।

দৃষ্টিভঙ্গী গঠন (Power of attitude)

এছাড়া **অন্যান্য উদ্দেশ্য** হিসাবে রয়েছে পাটীগণিতের মৌলিক চার নিয়ম সম্পাদনের দক্ষতা অর্জন, নির্ভুলতা ও দ্রুততার অভ্যাস গঠন, দৈনন্দিন জীবনে গণিতের ধারণা, দক্ষতা প্রয়োগ করার ক্ষমতা অর্জন, ব্যক্তিগত সামাজিক জীবনে সংখ্যার গুরুত্ব উপলব্ধি করা, পরিবেশ ও সমাজের ওপর গণিতের প্রভাব উপলব্ধি করা, জীবনের পরিমাণমূলক সমস্যার সমাধান করা, শিক্ষাগত ও বৃত্তিগত নির্বাচনে যোগ্যতা অর্জন করা, সূক্ষ্ম সৌন্দর্যবোধ সৃষ্টিতে গণিতের প্রভাব উপলব্ধি করা, সৃষ্টিমূলক শক্তির উন্নয়নে গণিতের প্রয়োজনীয়তা উপলব্ধি করা, বিশ্লেষণ ও আবিষ্কারের মনোভাব গঠনে সাহায্য করা প্রভৃতি।

অন্যান্য উদ্দেশ্য

বিদ্যালয় গণিত সাধারণভাবে তিনশ্রেণীতে বিভক্ত: (১) **পাটীগণিত** (২) **বীজগণিত** (৩) **জ্যামিতি**।

॥ পাটীগণিত শিক্ষার প্রত্যক্ষ উদ্দেশ্য ॥

(Direct aims of teaching Arithmetic)

(১) সংখ্যা, সময়, বস্তু ও স্থান প্রভৃতি বিষয়ে প্রত্যক্ষ অবধারণ করতে সাহায্য করা। (২) বিবিধ পরিমাপ, গণনা ও পরিমাণ সম্পর্কে জ্ঞান ও দক্ষতা অর্জনে সহায়তা করা। (৩) সংখ্যার ব্যবহার শেখানো। (৪) চারি নিয়মের ব্যবহার অভ্যস্ত করানো। (৫) বাস্তব জীবনের বিভিন্ন সমস্যা লক্ষ্য ক'রে তাকে বিশ্লেষণ ও সমাধান করা। (৬) বাস্তব জীবনে পাটীগণিতের প্রয়োগে সাহায্য করা। (৭) ভৌত পরিবেশের পরিমাণ-গত দিকে আগ্রহী করা। (৮) উচ্চতর গণিত শিক্ষার ভিত্তি প্রস্তুত করা।

পাটীগণিত শিক্ষার প্রত্যক্ষ উদ্দেশ্য

॥ বীজগণিত শিক্ষার প্রত্যক্ষ উদ্দেশ্য ॥

(Direct aims of teaching Algebra)

বীজগণিতকে **পাটীগণিতের সাধারণীকৃত রূপ** হিসেবে ব্যাখ্যা করা হয়। তাই বীজগণিত শিক্ষার প্রত্যক্ষ উদ্দেশ্য হ'ল:

(১) পাটীগণিতে তত্ত্বগত প্রক্রিয়ার বিস্তার ও তার ভিত্তি সুদৃঢ় করা।

বীজগণিত শিক্ষার প্রত্যক্ষ উদ্দেশ্য

(২) অভ্যাস ও গণনার মাধ্যমে উন্নত ও কার্যকর কৌশল উদ্ভাবনের দ্বারা শিক্ষার্থীদের গণনার দক্ষতা বৃদ্ধি করা। (৩) বীজগণিতের প্রধান হাতিয়ার সমীরকণ পদ্ধতির উন্নতি সাধন করা এবং পাটীগণিত, জ্যামিতি, পদার্থবিদ্যা ও অন্যান্য প্রাকৃতিক বিজ্ঞানের নানা সমস্যার সমাধানে তাকে প্রয়োগ করা। (৪) উচ্চতর গণিত ও বিভিন্ন ভৌতবিজ্ঞান শিক্ষায় প্রয়োজনীয় বিষয়গুলি সন্নিবিষ্ট করা।

॥ জ্যামিতি শিক্ষার প্রত্যক্ষ উদ্দেশ্য ॥
(Direct aims of teaching Geometry)

(১) কৃষ্টিমূলক বিকাশের এবং গাণিতিক চিন্তাধারায় উন্নয়নে সাহায্য করা।

জ্যামিতি শিক্ষার প্রত্যক্ষ উদ্দেশ্য

(২) স্বতঃসিদ্ধ ও ধারণার ওপর ভিত্তি ক'রে বুদ্ধির বিকাশ ও বিচারকরণের ক্ষমতা অর্জন করা। (৩) নতুন উপায় উদ্ভাবন করার দক্ষতা ও তৎপরতা বৃদ্ধি করা। (৪) সৌন্দর্য মূলক জ্ঞান বিকশিত করা। (৫) বিভিন্ন জিনিসের মধ্যে সামঞ্জস্য নির্ণয়ের ক্ষমতা অর্জন করা। (৬) সমস্যার বিশ্লেষণ দক্ষতা ও অভ্যাস অর্জনে সহায়তা করা। (৭) অবরোহ যুক্তির প্রয়োগ ও পর্যবেক্ষণের ক্ষমতা অর্জন করা।

গণিতের উপযোগিতা ও লক্ষ্য একই

সুতরাং গণিত শিক্ষার মূল্য বা উপযোগিতা নির্ভর করে গণিত শিক্ষার লক্ষ্যের ওপর। গণিত শিক্ষণের সময় দেখতে হবে তার ফলশ্রুতি কি ও কতটুকু। এটাই গণিত শিক্ষার উপযোগিতা বা মূল্য। তাই **গণিত শিক্ষার উপযোগিতা ও লক্ষ্য প্রায় একই**। কারণ গণিত শিক্ষার সময় মনের মধ্যে যে চেতনামূলক বাসনা বা লক্ষ্য রয়েছে সেটাই কার্যে রূপায়িত হচ্ছে। সেজন্য অনেকে গণিতের উপযোগিতা বা মূল্যকে গণিতের সাধারণ উদ্দেশ্য বা লক্ষ্য হিসাবে বর্ণনা করেছেন।

বিদ্যালয়ে গণিত শিক্ষার **উপযোগিতা** বা **উদ্দেশ্য** সাধারণতঃ **তিন ভাগে** বিভক্ত : (১) **ব্যবহারিক (Practical)** উদ্দেশ্য বা উপযোগিতা, (২) **কৃষ্টিমূলক (Cultural)** উদ্দেশ্য বা উপযোগিতা, (৩) **শৃঙ্খলামূলক (Disciplinary)** উদ্দেশ্য বা উপযোগিতা।

(১) **ব্যবহারিক উপযোগিতা বা উদ্দেশ্য** (Practical or utilitarian): গণিতের ব্যবহারিক উপযোগিতা বা উদ্দেশ্যের পরিধি ব্যাপক। আধুনিক সভ্যতা হ'ল যান্ত্রিক সভ্যতা। এ সভ্যতা পরোক্ষভাবে গণিতের ওপরেই নির্ভরশীল। আধুনিক সভ্যতার মূলে রয়েছে বিজ্ঞান, আর বিজ্ঞানের মূলে রয়েছে গণিত। আমাদের জীবনের চিন্তাধারা, ভাবধারা সবই জড়িত রয়েছে বিজ্ঞানের সঙ্গে, যার সত্যতা নির্ধারণ করে গণিত।

(ক) **দৈনন্দিন জীবনে গণিতের প্রভাব:** প্রতিটি মানুষ জীবনের প্রতিটি মুহূর্তে সজ্ঞানে বা অজ্ঞানে গণিতের প্রয়োগ নিয়তই করে চলেছে। কুলিমজুর থেকে শুরু ক'রে উচ্চপদস্থ কর্মচারী পর্যন্ত প্রত্যেককেই হিসাব রাখার জন্য টাকা, পয়সা গণনা করতে হয়; পরিমাপ করার জন্য বীজগণিত, জ্যামিতি বা ত্রিকোণমিতির ব্যবহার করতে হয়। সুতরাং দেখা যাচ্ছে চাকরি, ব্যবসা-বাণিজ্য প্রভৃতি ক্ষেত্রে নিযুক্ত ব্যক্তিরা প্রত্যক্ষভাবে গণিতের ব্যবহার করছে। এমনকি বাড়ীর গৃহিনীরাও রান্নার সময়ে গণিতের প্রয়োগ করতে বাধ্য হন।

(খ) **সামাজিক জীবনের ওপর গণিতের প্রভাব:** আধুনিক সাজ-সরঞ্জাম, আসবাব-পত্র, বাড়ী তৈরীর নক্সা, ঘর সাজানোর পদ্ধতি প্রভৃতির ক্ষেত্রেও গণিত আমাদের সহায়ক। গণিত হ'ল পার্থিব বিষয় সমূহের ব্যাখ্যার জন্য বৈজ্ঞানিকদের শ্রেষ্ঠ-হাতিয়ার। কারণ, বৈদ্যুতিক পাখা, রেডিও, টেলিভিশন, সিনেমা প্রভৃতি আবিষ্কারের ক্ষেত্রেও গণিতের অবদান অনস্বীকার্য।

(গ) **বিজ্ঞানের ওপর গণিতের প্রভাব:** Roger Bacon-এর মতে "Mathematics is the gateway and key to all sciences". Comte বলেছেন, "All scientific education which does not commence with mathematics, is of necessity, defective at its foundation."

বিজ্ঞানের লক্ষ্যই হ'ল বৈজ্ঞানিক সত্যকে ত্রুটিমুক্ত করা এবং তার জন্যই প্রয়োজন হয়ে পড়ে গণিতের ব্যবহারের। জ্যোতির্বিদ্যা, পদার্থবিদ্যা, সমাজ-বিজ্ঞান প্রভৃতির প্রতিটি ক্ষেত্রেই গণিত অপরিহার্য। এমন কি আধুনিক মনোবিজ্ঞানের ক্ষেত্রেও গণিতের অবদান কম নয়।

(ঘ) **শিল্প ও ব্যবসায়ে গণিত:** প্রত্যেক দেশের ও জাতির উন্নতি নির্ভর করে তার শিল্প ও ব্যবসায়ের উন্নতির ওপর। আর শিল্প ও ব্যবসায়ের

অগ্রগতি বিজ্ঞানের ওপর নির্ভরশীল। বিজ্ঞান গণিত ছাড়া একমুহূর্ত চলতে পারে না। সুতরাং শিল্প ও ব্যবসায় প্রতিটির উন্নয়ন পরোক্ষ বা প্রত্যক্ষভাবে গণিতের ওপরই নির্ভরশীল।

(ঙ) **যুদ্ধক্ষেত্রে গণিত ঃ** William Lanchaster যুদ্ধক্ষেত্রে বিরুদ্ধ দলকে বাধা দেওয়ার সম্পর্কে প্রথম গাণিতিক বিশ্লেষণে সক্ষম হন। তিনি প্রমাণ করেন গণিতের সাহায্যে একটি ক্ষুদ্র সৈন্যদল এক বৃহৎ সৈন্যদলকে অনায়াসেই পরাজিত করতে পায়ে। তাছাড়া গণিতের সাহায্যে শত্রুপক্ষের অবস্থান, গতিবিধি সবকিছুই নির্ণয় করা যায়।

(চ) **চারুকলায় গণিত ঃ** George David Birkhoff চারুকলায় বিশেষ করে সঙ্গীতে গণিতের অবদান সম্পর্কে গবেষণা করেন। তিনি চারুকলায় সাধারণ গাণিতিক নীতি আবিষ্কার করতে চেয়েছিলেন। তিনি বলেন যে সমস্ত গুণের ওপর সৌন্দর্যবোধ নির্ভরশীল, তা পরিমাপ করা সম্ভব। তাঁর মতে সৌন্দর্যবোধ তিনটি চলকের মধ্যে সীমাবদ্ধ :—

(১) Complexity of the objects (বিষয়বস্তুর জটিলতা) বা C,

(২) The feeling of Aesthetic measure (সৌন্দর্যানুভূতির পরিমাপ) বা M.

(৩) The property of harmony, symmetry or order (স্বর-সংযোগের জ্ঞান) বা O

তিনি এর সূত্র আবিষ্কার করলেন, $M = \frac{O}{C}$.

অর্থাৎ সৌন্দর্যের বিষবস্তু ও স্বর-সংযোগের অনুপাতই হ'ল তার সৌন্দর্য-বোধ।

তাছাড়া সঙ্গীত রচনা ও স্বরদানের ক্ষেত্রেও গণিতের অবদান অনস্বীকার্য।

(ছ) **ক্রীড়ায় গণিত ঃ** খেলাধূলার জন্য মাঠ তৈরী, খেলার পদ্ধতি প্রভৃতির ক্ষেত্রে গণিত বিশেষ ক'রে জ্যামিতি ও বীজগণিত-এর ব্যবহার অপরিহার্য।

সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে প্রয়োজনের তাগিদে পৃথিবীর প্রায় প্রতিটি মানুষই বিভিন্ন ব্যবহারিক ক্ষেত্রে কিছু না কিছু গণিত ব্যবহার করছে।

(২) **কৃষ্টিমূলক উদ্দেশ্য বা উপযোগিতা** (Cultural) ঃ গণিতের সঙ্গে সভ্যতা ও সংস্কৃতির অবিচ্ছেদ্য সম্পর্ক রয়েছে। গণিতের প্রয়োগে একদিকে যেমন সভ্য জীবনযাত্রার পরিধি উত্তরোত্তর বেড়েই চলেছে তেমনি

অন্যদিকে গণিত মানুষের অন্তর্নিহিত স্থায়ী মূল্যবোধটিকেও ধরে রেখেছে।

কৃষ্টিমূলক

গণিতের অনুপস্থিতিতে আধুনিক বিজ্ঞান-ভিত্তিক যান্ত্রিক সভ্যতা ধ্বংসপ্রাপ্ত হয়ে যেত। সুতরাং আধুনিক সভ্যতার উন্নতি, মানবসভ্যতার ক্রমবিকাশ প্রভৃতির ক্ষেত্রে গণিতের অবদান অনস্বীকার্য। গণিতের কৃষ্টিগত মূল্যের উপযোগিতা দিনদিন বেড়েই চলেছে। তাইতো

গণিত বনাম বিজ্ঞান ও যন্ত্র

Prof. Young বলেছেন, "Wherever we turn in these days of iron, steam and electricity we find that Mathematics has been the pioneer. Were its backbone removed, our material civilisation would inevitabely collapse." **বিভিন্ন বৈজ্ঞানিক রীতি এবং যন্ত্রপাতির মূলে রয়েছে নিভু‌র্ল গাণিতিক ধারণা।** জ্যোতির্বিদ্যা ও পদার্থবিদ্যাই হচ্ছে সবচেয়ে বিশুদ্ধ বিজ্ঞান আর তাদের এই বিশুদ্ধতার মূলে আছে গণিত।

Prf. Bell বলেন, "It is intersting to note that the advance in our konwledge of physics is largely due to the application of Mathematics and every year it becomes difficult for an experimenter to make a mark in the subject unless he is also a Mathematician." গণিতে পারদর্শী না হ'লে পদার্থবিদ্যা সংক্রান্ত গবেষণা, পরীক্ষা প্রভৃতিতে সাফল্যলাভ করা যায় না, কারণ পদার্থবিদ্যার মূলেই রয়েছে গণিত। তাছাড়া কারিগরী, কৃষি, নৌবিদ্যা, জমি-জরিপ প্রভৃতি সংক্রান্ত চাকরির উন্নয়নের ক্ষেত্রেও গণিত অপরিহার্য।

গণিত ও শিল্প

গণিত শিল্পেরও কেন্দ্রবিন্দু। চিত্র, সংগীত. কাব্য প্রভৃতির সম্পূর্ণতা ও সৌন্দর্য গণিতের ওপর নির্ভরশীল। প্রকৃতির নিয়মকে জানতে হলেও গণিত প্রয়োজন। **বর্তমান মহাকাশ অভিযান** যার জন্য পৃথিবী গৌরবান্বিত তাও **গণিতের কাছে ঋণী।**

(৩) শৃঙ্খলামূলক উপযোগিতা বা উদ্দেশ্য ঃ (Disciplinary)

প্রাচীন গ্রীকরা মনে করতেন মন কয়েকটি শক্তি বা বৃত্তির (faculty) সমষ্টিমাত্র। যেমন—স্মৃতিশক্তি, মনোযোগ, নিরীক্ষণ, বিচারকরণ, যুক্তি প্রভৃতি। এগুলিকে তাঁরা প্রাথমিক ক্ষমতা বলে মনে করতেন। তবে **গণিত শিক্ষণে স্মৃতিশক্তির স্থান অল্প এবং বিচারকরণ ও যুক্তি**

প্রয়োগ-এর স্থান বেশী। তাইতো Lock বলেছেন, "Mathematics is a way to settle in the mind a habit of reasoning." গণিত-শিক্ষার্থীকে তার যুক্তিশক্তির সঠিক প্রয়োগের জন্য উদ্বুদ্ধ ও পরিচালিত করা দরকার। সে যেন চিন্তা করে যে, স্মৃতিশক্তির চেয়ে যুক্তিশক্তি বা চিন্তাশক্তি অধিক ফলপ্রদ। মনে রাখতে হবে যে, জ্ঞান আহরণ অপেক্ষা মানসিকশক্তির উন্নয়নে গণিত আমাদের বেশী সাহায্য করে।

গণিত ও মানসিক উৎকর্ষ

বর্তমান যুগে Thurstone প্রভৃতি মনোবিজ্ঞানীরাও মনে করেন একক বুদ্ধি বলে কিছু নেই, আছে কতকগুলি **প্রাথমিক ক্ষমতা**। James ও অন্যান্যদের পরীক্ষা থেকে অনেকে মনে করেন যে মন এরকম কয়েকটি ক্ষমতার সমষ্টি নয় বরং কোন এক বিশেষ ক্ষমতা, যা, সব ক্ষেত্রেই কাজে লাগে না।

Thorndike ; Woodworth প্রভৃতি মনোবিজ্ঞানীদের অনুসন্ধান থেকে মানসিকশক্তির কার্যকারিতা সম্পর্কে যে তথ্য পাওয়া গেছেতাতে বোঝা যায়ঃ—

(১) **মানসিক উৎকর্ষ ও তার প্রয়োগগত সম্ভাবনা** বিভিন্ন ক্ষেত্রের **বিষয় ও পদ্ধতির ওপর নির্ভর করে।** সাধারণ উপাদান যত বেশী থাকবে মানসিক শক্তির প্রয়োগের সম্ভাবনা তত বেশী হবে।

(২) প্রত্যেকটি সাফল্যের পেছনে **উদ্দেশ্য, প্রেরণা, আগ্রহ, মনোযোগ** প্রভৃতি মানসিক অবস্থাগুলি অংশগ্রহণ করে।

(৩) সব ক্ষেত্রেই **অভিজ্ঞতার সাধারণীকরণ** বিশেষ প্রয়োজনীয়।

সার্থক গণিত শিক্ষণের ক্ষেত্রে উপরোক্ত মানসিক উৎকর্ষগুলি অপরিহার্য। গণিত শিক্ষার ফলে মন হয় নিয়মানুবর্তী, যুক্তিশক্তি পায় বৃদ্ধি। কারণ, গণিত শিক্ষণে বিচারকরণের মাধ্যমে মানসিক শক্তির যে বৈশিষ্ট্যগুলি বিকশিত হয়, সেগুলি হলঃ (১) সরলতা (Simplicity) (২) নির্ভুলতা (Accuracy), (৩) ফলাফলের নিশ্চয়তা (Certainty of results) (৪) মৌলিকতা (Originality) (৫) যুক্তির পরিমাপ (Amount of reasoning) এবং (৬) জীবনে গণিতের প্রয়োগ (Application of Mathematical knowledge in life)

গণিত শিক্ষণে মানসিক শক্তির বৈশিষ্ট্য

এছাড়া শৃঙ্খলামূলক উপযোগিতা হিসাবে আরও কতকগুলি দিক আছে।

যেমন :—মনোযোগের ক্ষমতাবৃদ্ধি (Power of Concentration), আবিষ্কার-মূলক ক্ষমতা অর্জন (Power of inventive faculty), চরিত্রগঠন (formation of character), মানসিক আত্ম-নির্ভরতা (Mental reliance) এবং সৃজনমূলক কল্পনাশক্তি (Constructive imagination) যার মাধ্যমে শিক্ষার্থীরা জীবনের সমস্যার সমাধানে সমর্থ হয়।

অন্যান্য বৈশিষ্ট্য

এ ছাড়া রয়েছে গণিতের আরো কয়েকটি **অপ্রধান উপযোগিতা**—

(১) সামাজিক উপযোগিতা (Social value)

সামাজিক নেতৃত্ব গঠনে প্রয়োজন গণিত। প্রশাসনিক রিপোর্ট, বাজেট বক্তৃতা, প্রভৃতি গাণিতিক লেখচিত্র ও সংখ্যাতত্ত্বে পরিপূর্ণ। সামাজিক নেতার কাজই হ'ল এগুলিকে সাধারণের কাছে বোধগম্য করা। সুতরাং গণিতের সঠিক জ্ঞান না থাকলে তার পক্ষে এ ব্যাপারে কিংবা সামাজিক জীবন পরিচালনার কাজে অংশগ্রহণ অসম্ভব।

(২) নৈতিক উপযোগিতা (Moral value)

আত্মসংযমের দক্ষতা, আত্মনিয়ন্ত্রণের প্রযোজ্যতার ওপর নৈতিক কার্য নির্ভরশীল। গণিত তাদেরই পরিপূরক। Dutton এর মতে "Mathematics furnishes the power of deliberate thought and accurate statement and to speak truth." **গণিত শিক্ষায় সত্যের প্রতি শ্রদ্ধা ও নিষ্ঠা জন্মায় এবং আত্ম সমীক্ষার অভ্যাস তৈরী হয়।**

(৩) সৌন্দর্য্যমূলক উপযোগিতা : (Aesthetic value)

Thorndike বলেছেন, "Education as a whole should foster the higher impersonal pleasure," গণিত আনন্দের উৎস। প্রতিটি শিক্ষার্থীর মধ্যে তার **সৃষ্টিগত ও বুদ্ধিগত ঔৎসুক্য** বর্তমান। **এই প্রবৃত্তিকে সন্তুষ্ট করার জন্য গণিতই একমাত্র হাতিয়ার।**

এখন প্রশ্ন হোল, মাধ্যমিক স্তরে বা **বিদ্যালয়ে গণিতশিক্ষার কোন উদ্দেশ্য বা উপযোগিতাকে অগ্রাধিকার দিতে হবে এবং কেন?** দৈনন্দিন জীবনে গণিতের ব্যবহারিক মূল্যই বেশী। কৃষ্টিমূলক উদ্দেশ্যের মূল কথা হ'ল, সভ্যতার বিকাশে গণিতের অপরিহার্য্যতা। সভ্যতার বিকাশ বলতে বোঝায়—শিল্প, সংস্কৃতি ও সমাজের উন্নয়ন যা গণিতের ব্যবহারিক প্রয়োগেই সম্ভব।

সুতরাং গণিতের **কৃষ্টিমূলক উদ্দেশ্য বা উপযোগিতা, ব্যবহারিক মূল্য বা উপযোগিতারই এক উন্নত রূপ।** প্রথমটি জীবন ও জীবিকার পরিবাহক। দ্বিতীয়টি উন্নততর জীবন ও জীবিকার ভিত্তি। দুটি ক্ষেত্রেই গণিতকে বাস্তব জগতের প্রয়োজনে ব্যবহার করা হয়। দুটিকেই বলা যেতে পারে গণিতজ্ঞানের বাস্তব প্রয়োগের দুই শাখা। এই কারণেই বলা হয় **গণিত শিক্ষণের প্রধানতঃ দুটি উদ্দেশ্য** (১) **শৃঙ্খলামূলক** (২) **তথ্যের জ্ঞান আহরণমূলক** (বাস্তব প্রয়োগের উদ্দেশ্য), অর্থাৎ "Mathematics is primarily taught on account of the mental training it affords and the knowledge of fact it imparts." তাই **বিদ্যালয়স্তরে প্রত্যক্ষভাবে গণিত শিক্ষণের ক্ষেত্রে ঐ দুটি উদ্দেশ্যের ওপরেই জোর দেওয়া হয়।**

বিদ্যালয় স্তরে গণিত শিক্ষার উপযোগিতা বা উদ্দেশ্য

অতীতে শৃঙ্খলামূলক মূল্যের জন্যই পাঠক্রমে গণিতের স্থান ছিল গুরুত্বপূর্ণ। তবে সভ্যতা ও বিজ্ঞানের ক্রমোন্নতির ফলে জীবনযাত্রার মান ও জীবন ধারণের রূপ পরিবর্তিত ও পরিবর্ধিত হওয়ায় গণিতের জ্ঞানমূলক ব্যবহারিক মূল্যটিও বিবেচিত হচ্ছে, উৎপাদনশীল দক্ষ নাগরিক তৈরী করাই সমাজের উদ্দেশ্য। এই নাগরিকতা শিক্ষায় গণিতের বিশেষ ভূমিকা বর্তমান। সেইজন্য ব্যবহারিক উদ্দেশ্যটি শৃঙ্খলাগত উদ্দেশ্যটির তুলনায় বেশী প্রকট হয়ে দেখা দিয়েছে।

অতীতে গণিত শিক্ষার উদ্দেশ্য ও তার বিবর্তন

আবার জ্ঞান পরিবর্তনীয়। শিক্ষার্থী বিদ্যালয়ে যে তথ্যমূলক জ্ঞান আহরণ করছে, পরবর্তী জীবনে তার কোন গুরুত্ব নাও থাকতে পারে। সুতরাং তথ্যমূলক জ্ঞান আহরন করাই গণিত শিক্ষার একমাত্র উদ্দেশ্য হতে পারে না। জ্ঞান অর্জন করার ক্ষমতা অর্জন করতে হবে।

বিদ্যালয়ে গণিত ও জ্ঞান-অর্জন

সুচিন্তিত কাজই মানুষের জীবনকে নিয়ন্ত্রিত করে। শুধুমাত্র জ্ঞানের পরিধি বাড়লেই মানুষের যোগ্যতা বাড়ে না। তার সঙ্গে চিন্তা, যুক্তি ও বিচার করার শক্তি বিকাশ করতে হবে যার মাধ্যমে সে জ্ঞানকে সঠিকভাবে প্রয়োগ করে সুনাগরিক হতে পারে।

জ্ঞান-অর্জন ও মানসিক উৎকর্ষ

সেইজন্যই প্রয়োজনীয় তথ্যের জ্ঞান আহরণ ও মানসিক শৃঙ্খলার উদ্দেশ্য দুইটিকেই গণিতের পাঠক্রমে সমান মূল্য দিতে হবে। গণিত শিক্ষকের কাজ

মানসিক শিক্ষা ও প্রয়োজনীয় তথ্য —জ্ঞানের সমন্বয়

হবে, মানসিক শিক্ষা ও প্রয়োজনীয় তথ্যের জ্ঞান—এই উভয়বিধ শিক্ষায় ছাত্রদের শিক্ষিত করা। এটি করতে হবে অনুবন্ধ প্রণালীর মাধ্যমে। বিখ্যাত মনোবিজ্ঞানী Thorndike-এর ভাষায় বলতে গেলে "Teach nothing because of its disciplinary value, but every thing so as to get what disciplinary it does have."

গণিতশিক্ষা ও কোঠারী কমিশন

কোঠারী কমিশন অবশ্য গণিতের জ্ঞানমূলক ব্যবহারের ওপর বেশী জোর দিয়েছেন। কমিশনের মতে, বর্তমান বৈজ্ঞানিক ও যান্ত্রিক যুগের সঙ্গে তালে তাল দিয়ে চলতে হলে গণিতের জ্ঞান ও তার ব্যবহার বিশেষ প্রয়োজন। আজ বিজ্ঞান ও যন্ত্র যে বিপ্লব সাধন করছে, তাকে দেশের ও জাতির কল্যাণে লাগাতে হলে গণিতশিক্ষা অপরিহার্য এবং তার উপযুক্ত ভিত্তিভূমি হ'ল বিদ্যালয়।

প্রশ্নাবলী

1, Indicate the main aims and values of teaching mathematics and the procedure by which you would ensure that these are being realised in practice.

[C. U. B. T. '65]

2. What are the specific objectives of teaching elementary mathematics in our Secondary Schools ? What kind of learning situations would you like to create in the Class-room and outside for the attainment of those objectives ? [C. U. B. T. '67]

3. "The true aim of learning mathematics is the development of mental powers and not the acquirement of the knowledge of mathematical facts". Do you agree ? Give reasons for your answer,

[C. U. B. T. 68]

4. What are the specific aims of teaching arithmetic, algebra and geometry in Secondary Schools? What procedure would you follow for the attainment of those aims? [C. U. B. T. 69]

5. "Mathematics is a creative activity, with many aspects—more aspects than are generally recognised." —In the light of this statement discuss the aims of teaching mathematics in School. [C. U. B. Ed. '71]

6. Discuss briefly the aims of teachig mathematics in Secondary School in India. [C. U. B. Ed. 72]

7. Analyse briefly the different values of the Study of mathematics in general and how they are helpful in the teaching of the subject. [C. U. B. Ed. 73]

8. Indicate the general aims of teaching mathematics in Schools, and the specific aims relating to arithmetic, algebra and geometry respectively, as far as practicable. Briefly discuss the drawbacks in our educational programme hindering of these aims.

[B. U. B. T. 67]

9. Indicate in brief the utilitarian, cultural and disciplinary values of learning mathematics in schools and the general principles of mathematical education including pitfalls to be avoided towards the effective realisation of those. [B. U. B. T. 68]

॥ তৃতীয় অধ্যায় ॥
গণিত শিক্ষণের সাধারণ পদ্ধতি
(General Methods of Teaching Mathematics)

ভূমিকা

শিক্ষাদান প্রক্রিয়া এক জটিল শিল্পপ্রক্রিয়া। শিক্ষায় আমাদের সামনে থাকে **শিক্ষার্থী** ও **বিষয়বস্তু**। শিক্ষার্থীকে শিক্ষা দিতে গেলে জানতে হবে তার স্বরূপ, তার মনের গঠন। কিভাবে, কি উপায়ে বিষয়বস্তু উপস্থাপন করলে শিক্ষার্থীর মন তাকে গ্রহণ করবে, এসব জেনে আমাদের শিক্ষাপদ্ধতি নির্ধারণ করতে হবে।

বিদ্যালয়ে গণিত শিক্ষণের নীতিঃ (Principles of Teaching Mathematics in School)

আগ্রহ ও প্রেষণা

যে কোন বিষয় শিক্ষা দিতে গেলে বিষয়টির প্রতি শিক্ষার্থীর **আগ্রহ** সঞ্চার আগে করতে হয়—বিষয়টি শিখতে তাকে অনুপ্রাণিত করতে হয়—তার প্রেষণা জাগাতে হয়। গণিত বিষয়টি এ পথে মস্ত বাধা। গণিত শিক্ষায় **প্রেষণা** সর্বাগ্রে প্রয়োজন। শিশুর জীবনের চাহিদাগুলি গণিত শিক্ষার মাধ্যমে পূরণ করতে পারলে তার গণিত শিক্ষায় প্রেষণা উৎপন্ন হবে। এই প্রেষণাই তাকে গণিত শিক্ষায় করবে অনুপ্রাণিত ও তার মনে জাগাবে আগ্রহ।

গণিত শিক্ষণে যান্ত্রিকতার বদলে অর্থপূর্ণ উপস্থাপনের প্রয়োজন। তার জন্য প্রয়োজন শিক্ষার্থীর পরিচিত পরিবেশকে কেন্দ্র ক'রে মূর্ত বস্তুর মাধ্যমে ধীরে ধীরে বিমূর্তের দিকে যাওয়া।

উদ্দেশ্যপূর্ণ, অর্থপূর্ণ, জীবনকেন্দ্রিক, আবিষ্কারমূলক ও সামগ্রিক শিক্ষা

গণিত শিক্ষণ সার্থক করতে হলে শিক্ষককে মনে রাখতে হবে, শিক্ষা যেন **উদ্দেশ্যপূর্ণ** ও **অর্থপূর্ণ** হয়, শিক্ষা যেন **জীবনকেন্দ্রিক** ও **আবিষ্কারমূলক** হয়, শিক্ষা যেন **সামগ্রিক** হয় অর্থাৎ বিভিন্ন অংশের পারস্পরিক ও সমগ্রের সঙ্গে সম্পর্কটি শিক্ষার্থী যেন বুঝতে পারে।

শিক্ষণ ফলপ্রদ করতে হলে শিক্ষার্থীর মানসিক শক্তি ও বৈষম্য অনুযায়ী

বিষয়-বস্তুতে সংগঠিত করতে হবে। গণিত শিক্ষণের সার্থকতা নির্ভর করে **শিক্ষকের জ্ঞান, অভিজ্ঞতা, আগ্রহ, সহযোগিতা, ধৈর্য্য, মানসিক উৎকর্ষ** ও **প্রযুক্ত পদ্ধতির ওপর—শিক্ষার্থীর বুদ্ধি, পরিণমন, রুচি, আগ্রহ, প্রচেষ্টা, প্রেরণা, স্বাভাবিক ক্ষমতা, অর্জিত গাণিতিক জ্ঞানের আয়ত্তীকরণের মাত্রার ওপর** এবং **গৃহ ও পরিবেশগত প্রেষণা ও প্রচেষ্টার ওপর।**

গণিত শিক্ষার সার্থকতা

সুতরাং গণিতে সাফল্যের জন্য প্রয়োজন **শিক্ষার্থী শিক্ষক ও বিষয়বস্তুর সার্থক ও ধারাবাহিক সংযোগ। সকল গণিত শিক্ষণে শিক্ষক ও পদ্ধতিই প্রধান বিবেচ্য বিষয়।**

গণিত শিক্ষণে দুটি জিনিসের কথা প্রায়ই শোনা যায়। একটি হল **পদ্ধতি** (Method) এবং অপরটি **প্রণালী** (Mode)। Prof. Young-এর ভাষায়, "In the pedagogical study of mathematics we mainly concern ourselves with two things, the manner in which the subject matter is arranged and the way in which it is presented to the pupils. The former is called "Method" and the latter is 'Mode'." অর্থাৎ বিষয়বস্তুকে যেভাবে সাজানো হয় তাকে বলে পদ্ধতি এবং বিষয়বস্তু যেভাবে শিক্ষার্থীদের কাছে উপস্থাপিত হয় তাকে বলা হয় প্রণালী। 'পদ্ধতি' ও 'প্রণালী' এই পার্থক্য বাস্তবে অনুসরণ করা হয় না। বাস্তবে একই অর্থে উভয়কেই ব্যবহার করা হয়।

পদ্ধতি ও প্রণালী

শিক্ষার বিভিন্ন পদ্ধতি : (Different methods of teaching)

শিক্ষাদানকার্য এক শিল্পপ্রক্রিয়া হ'লেও তার পেছনে আছে বৈজ্ঞানিক ভিত্তি। শিক্ষাপদ্ধতি নির্ধারণের পেছনে দুটি প্রভাব সক্রিয়, একটি **মনস্তত্ত্বের দিক**, অপরটি **যুক্তির দিক**। আধুনিক বৈজ্ঞানিক শিক্ষাপদ্ধতিতে শিক্ষাসম্পর্কিত কতকগুলি মূলনীতি মেনে চলতে হয়। সেগুলি হয় যুক্তিভিত্তিক না হয় মনস্তত্ত্ব নির্ভর।

যুক্তিসম্মত ও মনোবিজ্ঞান সম্মত পদ্ধতি

গণিত শিক্ষণে যে সমস্ত পদ্ধতি ব্যবহার করা হয় সেগুলি সম্পূর্ণ পৃথক বা স্বয়ং-সম্পূর্ণ পদ্ধতি নয়। অনেক সময় কোন একটি পদ্ধতির প্রভাব অপর একটি পদ্ধতির মধ্যে দেখা যায়। আবার একই জিনিস শেখাবার সময়ও বিভিন্ন পদ্ধতির প্রয়োগ করা হয়। এত বিভিন্নতা সত্ত্বেও প্রত্যেকটি পদ্ধতির নিজস্ব বৈশিষ্ট্য বর্তমান।

পদ্ধতির বৈশিষ্ট্য

বিদ্যালয়ে গণিত শিক্ষণে প্রধানতঃ যে সমস্ত মনোবিজ্ঞানসম্মত, যুক্তিসম্মত বা অন্যান্য পদ্ধতি ব্যবহৃত হয় সেগুলি হ'ল ঃ

বিভিন্ন পদ্ধতি

(১) **বিশ্লেষণী ও সংশ্লেষণী পদ্ধতি** (Analytic and synthetic method)

(২) **আরোহী ও অবরোহী পদ্ধতি** (Inductive and Deductive method)

(৩) **আবিষ্কারকের পদ্ধতি** (Heuristic method)

(৪) **পরীক্ষাগার পদ্ধতি** (Laboratory method)

(৫) **নির্দেশমূলক পদ্ধতি** (Assignment method)

এছাড়া আরও কতকগুলি **অপ্রধান** গণিত শিক্ষণপদ্ধতি রয়েছে যেগুলি বর্তমান মনোবিজ্ঞানভিত্তিক জীবনকেন্দ্রিক বিদ্যালয় শিক্ষাব্যবস্থায় অচল ঃ

(১) **বক্তৃতা পদ্ধতি** (Lecture method)

(২) **ঐতিহাসিক পদ্ধতি** (Historical method)

(৩) **একরোখা যুক্তিযুক্ত পদ্ধতি** (Dogmatic method)

বিশ্লেষণী ও সংশ্লেষণী পদ্ধতি (Analytic and Synthetic method) ঃ

বুৎপত্তিগত অর্থ

Analysis বা **বিশ্লেষণ** কথাটির মূল অর্থই হল **একত্রিত বস্তুগুলিকে পৃথক বা বিশ্লিষ্ট করা।** আর Synthesis বা **সংশ্লেষণ** কথাটির অর্থ হ'ল বিশ্লিষ্ট অংশগুলিকে **একত্রিত ক'রে সমগ্র বস্তুটি প্রস্তুত করা।**

Analysis হ'ল—একটি সমস্যাকে এমনভাবে বিশ্লিষ্ট বা পৃথকীকরণ করা যার অংশগুলিকে একত্র করলে পূর্বের সমস্যাটি পাওয়া যায়। Synthesis হ'ল—বিশ্লিষ্ট অংশগুলিকে একত্রিত ক'রে সমস্যাটির যথার্থতা প্রমাণ করা।

গণিতে সংশ্লেষণ ও বিশ্লেষণ

গণিতে আমরা বিশ্লিষ্ট অংশগুলিকে একত্রিত ক'রে সম্পূর্ণ সমস্যাটি উপলব্ধি করার জন্য Analytic method বা বিশ্লেষণ পদ্ধতি প্রয়োগ করি, অর্থাৎ দেখি কিভাবে বিশ্লিষ্ট বস্তুগুলি একত্রিত হয়ে সমগ্র সমস্যাটির সৃষ্টি করে। সেইজন্যই Synthetic method বা সংশ্লেষণ পদ্ধতির মাধ্যমে গণিতে বিশ্লিষ্ট অংশগুলিকে একত্রিত ক'রে সমগ্র সমস্যাটি প্রস্তুত করা সম্ভব।

বিশ্লেষণ থেকেই সংশ্লেষণের সৃষ্টি এবং সংশ্লেষণের মাধ্যমেই বিশ্লেষণের অর্থ ও ব্যাখ্যা স্পষ্ট ও সম্পূর্ণ হয়। একথা সত্য যে, **সংশ্লেষণ ছাড়া বিশ্লেষণ অর্থহীন**। বিশ্লেষণ হ'ল **চিন্তনপ্রক্রিয়া** (process of thought) এবং সংশ্লেষণ হ'ল **চিন্তন প্রক্রিয়ার ফলশ্রুতি** (effect)। অপরপক্ষে বিশ্লেষণ হচ্ছে সিদ্ধান্ত বা সত্য আবিষ্কারের প্রক্রিয়া এবং সংশ্লেষণ হচ্ছে সংক্ষিপ্ত উপায়ে সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়ার পদ্ধতি। সুতরাং সংশ্লেষণ ও বিশ্লেষণ পদ্ধতি উভয়েই **পরস্পরের উপর নির্ভরনীল এবং একটি অপরটির পরিপূরক**।

বৈশিষ্ট্য

সংশ্লেষণী পদ্ধতি বা Synthetic method : কোন জানা বা জ্ঞাত তথ্যকে ভিত্তি ক'রে পরীক্ষা-নিরীক্ষার সাহায্যে অজানা সিদ্ধান্তটিতে উপনীত হওয়ার পদ্ধতিই হ'ল Synthetic method বা সংশ্লেষণী পদ্ধতি। এই পদ্ধতিতে প্রমাণ সুরু হয় Hypothesis বা **প্রদত্ত সর্ত্ত** বা অনুমান থেকে আর সমাপ্তি ঘটে Conclusion বা **সিদ্ধান্তের** মধ্যে। সংশ্লেষণী পদ্ধতিতে আমরা বলি, x সত্য হ'লে y সত্য। আবার y সত্য বলেই zও সত্য। এখানে প্রথমে x হ'ল Hypothesis y হ'ল Conclusion আবার পরেরটিতে y হচ্ছে Hypothesis এবং z হচ্ছে Conclusion।

সংশ্লেষণী পদ্ধতির সংজ্ঞা

বিশ্লেষণী পদ্ধতি বা Analytic method : কোন অজানা সিদ্ধান্তকে বিশ্লেষণ করে জানা বা জ্ঞাত তথ্যটির দিকে অগ্রসর হওয়ার পদ্ধতিই হল Analytic বা বিশ্লেষণী পদ্ধতি। এই পদ্ধতিতে প্রমাণ সুরু হয় **সিদ্ধান্ত থেকে**। সমাপ্তি ঘটে **প্রদত্ত তথ্যের মধ্যে**। এখানে অজানা সিদ্ধান্তকে বিশ্লেষণ করে দেখতে হয় ঐ অজানা সিদ্ধান্তটি কোন্ সত্যতার ওপর নির্ভরশীল। এইভাবে ক্রমাগত বিশ্লেষণের মাধ্যমে নানা বিকল্প সিদ্ধান্তের পরিপ্রেক্ষিতে জানা বা জ্ঞাত তথ্যটির মধ্যে পৌছাই, যার সত্যতা প্রদত্ত। এইভাবে প্রমাণ করা হয় অজানা সিদ্ধান্তটিও সত্য ও অভ্রান্ত। বিশ্লেষণী পদ্ধতিতে আমরা বলি, z সত্য হবে যখন y সত্য, আর y সত্য হবে যখন x সত্য। কিন্তু x সত্য—এটি প্রদত্ত তথ্য। সুতরাং z সত্য ও অভ্রান্ত। এখানে z হ'ল conclusion ও y হচ্ছে hypothesis, আবার পরে y হচ্ছে conclusion এবং x হল hypothesis, যার সত্যতা আগেই দেওয়া আছে।

বিশ্লেষণী পদ্ধতির সংজ্ঞা

বিশ্লেষণী ও সংশ্লেষণী পদ্ধতির প্রমাণ ঃ

সমস্যা ১। যদি $p : q = r : s$ হয়, প্রমাণ করতে হবে,

$$\frac{pr+3q^2}{qr}=\frac{r^2+3qs}{rs}$$

সংশ্লেষণী প্রমাণ ঃ $\frac{p}{q}=\frac{r}{s}$ [Hypothesis]

উভয়পক্ষে $\frac{3q}{r}$ যোগ করা হল [কেন ? তার ব্যাখ্যা নেই]

$$\frac{p}{q}+\frac{3q}{r}=\frac{r}{s}+\frac{3q}{r}$$

বা, $\frac{pr+3q^2}{qr}=\frac{r^2+3qs}{rs}$ [Conclusion]

বিশ্লেষণী প্রমাণ ঃ

$\frac{pr+3q^2}{qr}=\frac{r^2+3qs}{rs}$ অভেদটি সত্য হবে, [Conclusion]

যখন, $\frac{pr+3q^2}{q}=\frac{r^2+3qs}{s}$ সত্য হবে,

বা যখন, $s(pr+3q^2)=q(r^2+3qs)$ সত্য হবে,

বা যখন, $prs+3q^2s=qr^2+3q^2s$ সত্য হবে,

বা যখন, $prs=qr^2$ সত্য হবে,

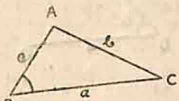
বা যখন, $ps=qr$ সত্য হবে,

বা যখন, $\frac{p}{q}=\frac{r}{s}$ সত্য হবে।

কিন্তু $\frac{p}{q}=\frac{r}{s}$ সত্য, কারণ এটি প্রদত্ত তথ্য বা Hypothesis।

সুতরাং $\frac{pr+3q^2}{qr}=\frac{r^2+3qs}{rs}$ অভেদটি সত্য ও অভ্রান্ত।

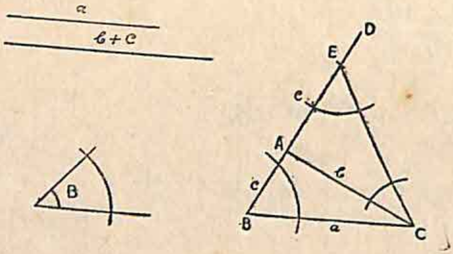
সমস্যা ২। কোন ত্রিভুজের ভূমি, ভূমিসংলগ্ন একটি কোণ এবং অপর দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।



ধরা যাক ABC ত্রিভুজের ভূমি BCর দৈর্ঘ্য a এবং অপর দুই বাহু AB ও AC-এর সমষ্টির দৈর্ঘ্য $(b+c)$ দেওয়া আছে ; আর দেওয়া আছে ভূমি BCর সংলগ্ন $\angle ABC$ বা সংক্ষেপে $\angle B$। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

সংশ্লেষণী পদ্ধতিতে অঙ্কন ঃ

ভূমি aর সমান ক'রে BC সরলরেখা টেনে, BCর B বিন্দুতে ∠Bর সমান ক'রে ∠DBC কোণ আঁকতে হবে।



তারপর BD থেকে $(b+c)$র সমান ক'রে BE অংশ কেটে নিয়ে CE যোগ করতে হবে। CEর c বিন্দুতে ∠BECর সমান ক'রে ∠ECA আঁকতে হবে। CA সরলরেখা BEকে A বিন্দুতে ছেদ করবে। তাহলে ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ হবে।

বিশ্লেষণী পদ্ধতিতে অঙ্কন ঃ

ABC ত্রিভুজের ভূমি $BC = a$, ভূমিসংলগ্ন কোণ ∠ABC বা ∠B এবং AC+BAর দৈর্ঘ্য $b+c$ দেওয়া আছে।

প্রঃ অভীষ্ট ত্রিভুজটি আকতে গেলে প্রথমে কোন্‌টি আঁকা সম্ভব ?

উঃ BC বা a দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট ভূমিটি আঁকা সম্ভব।

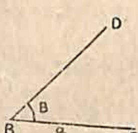


প্রঃ ভূমিটি কেন প্রথমে আঁকতে হবে ?

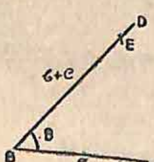
উঃ ভূমি প্রথমে আঁকতে পারলে ভূমি সংলগ্ন কোণটিও পরে আঁকা যাবে।

প্রঃ তাহলে কোথায় ভূমি সংলগ্ন কোণ অর্থাৎ ∠ABC বা ∠Bটি আঁকবে ?

উঃ BC ভূমির B বিন্দুতে ∠Bর সমান ∠DBC আঁকতে হবে।



প্রঃ তৃতীয় প্রদত্ত সর্তটি কি এবং কিভাবে আঁকবে ?



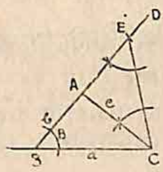
উঃ তৃতীয় প্রদত্ত সর্তটি অপর দুই বাহুর সমষ্টি অর্থাৎ BA+AC বা $b+c$ এবং $b+c$র সমান ক'রে BD থেকে BE অংশ কেটে নিতে হবে।

প্রঃ ABC ত্রিভূজের A বিন্দুটি কিভাবে নিতে হবে ?

উঃ A বিন্দুটি এমন ভাবে নিতে হবে যেন $BA + AC = b + c = BE = BA + AE$ হয়। অর্থাৎ $AC = AE$ করে আঁকতে হবে।

প্রঃ তা কেমন ক'রে সম্ভব হবে ?

উঃ CE যোগ ক'রে CEর C বিন্দুতে ∠ECA = ∠AEC আঁকতে হবে। তাহলেই AC = AE হবে। কারণ কোন ত্রিভুজের দুই কোণ পরস্পর সমান হ'লে তাদের বিপরীত বাহুদ্বয়ও পরস্পর সমান হবে। আর AC = AE হলেই ABC ত্রিভুজটিই অভীষ্ট ত্রিভুজ হবে।



॥ সমালোচনা ॥

সংশ্লেষণী পদ্ধতির প্রমাণ সংক্ষিপ্ত ও মার্জিত, কিন্তু কতকটা অনুমানের ওপর নির্ভর ক'রে Trial and Error পদ্ধতির মাধ্যমে অগ্রসর হতে হয়। সেজন্য প্রমাণটা ঠিক বোঝা যায় না। যেমন বীজগণিতের প্রথম উদাহরণটিতে উভয় পক্ষে $\frac{3q}{r}$ কেন যোগ করা হ'ল তা থেকে গেছে অস্পষ্ট। তেমনি জ্যামিতির ত্রিভুজ অঙ্কনের ক্ষেত্রেও প্রথম উদাহরণে CE কেন যোগ করা হ'ল ? CE-র C বিন্দুতে ∠BEC-র সমান ∠ECA কেন আঁকা হ'ল ? তার কোন সদুত্তর সেখানে নেই। খানিকটা যান্ত্রিক ভাবে আন্দাজে অগ্রসর হতে হয়েছে।

সংশ্লেষণ ও বিশ্লেষণের তুলনামূলক আলোচনা :

বিশ্লেষণী পদ্ধতি দীর্ঘ ও ক্লান্তিকর তবে **প্রমাণের প্রত্যেকটি ধাপ স্পষ্ট ও বোধগম্য।**

সংশ্লেষণী পদ্ধতি এক বিশেষ পদ্ধতি যার ধাপগুলির **সত্যতা বোঝা যায় কিন্তু ব্যাখ্যা করা যায় না।** এখানে কতকগুলি জানা সত্যকে একত্র ক'রে পরীক্ষা-নিরীক্ষার মাধ্যমে অজানা সত্যকে বার করতে হয়। কিন্তু বিশ্লেষণী পদ্ধতিতে অজানা সিদ্ধান্তটীকে বিশ্লেষণ ক'রে ছোট ছোট ভাগ ক'রে সেই ভাগগুলির সত্যতা প্রমাণ করলেই অজানা সিদ্ধান্তটির সত্যতা আপনা আপনি প্রমাণিত হয়ে যায়। তাই Prof, Young বলেছেন, "The synthetic method seeks a needle in a haystack but in the analytic method the needle seeks to get out of the haystack."

বিশ্লেষণী পদ্ধতি হচ্ছে **সত্যিকারের গণিতজ্ঞের পদ্ধতি**। কোন বিষয়ের প্রমাণ আবিষ্কার করার সময় বা ভুলে গেলে **পুনরাবিষ্কারের জন্য**

বিশ্লেষণী পদ্ধতিই হল প্রশস্ত উপায়। কিন্তু প্রমাণটিকে সংক্ষেপে ও সুন্দরভাবে উপস্থাপন করতে হলে সংশ্লেষণী পদ্ধতিই শ্রেয়। কারণ সংশ্লেষণী পদ্ধতিতে আবিষ্কৃত তথ্যই উপস্থাপিত হয়। এতে বিন্দুমাত্র **আবিষ্কারের মনোভাব গড়ে ওঠে না।** তাই বলা হয় "The analytic method is the method of the mathematical worker, the synthetic method is that in which he usually presents his results." Arthur Schultze-এর ভাষায় "Analysis is the method of discovery, synthesis is the method of concise and elegant presentation."

শ্রেণীকক্ষে সংশ্লেষণ ও বিশ্লেষণ

সেজন্যই গণিত পাঠ্যপুস্তকগুলি সংশ্লেষণী পদ্ধতিতে লিখিত। বিদ্যালয়ে শ্রেণী কক্ষে শিক্ষার্থীদের কাছে প্রথমে বিশ্লেষণীপদ্ধতিতে পাঠ্যবিষয় উপস্থাপন করে সমস্যাটির প্রতিটি ধাপ সুস্পষ্টভাবে বোধগম্য হবার পর সংশ্লেষণী পদ্ধতিতে সংক্ষিপ্ত ভাবে প্রমাণ করলে গণিত শিক্ষাদান কার্যকরী ও চিরস্থায়ী হয়।

সংশ্লেষণী পদ্ধতি যুক্তিনির্ভর পদ্ধতি কিন্তু বিশ্লেষণী পদ্ধতি মনোবিজ্ঞানসম্মত পদ্ধতি। সংশ্লেষণী পদ্ধতিতে স্মৃতিশক্তির প্রভাব বেশী, বুদ্ধির ব্যবহার কম। কিন্তু বিশ্লেষণী পদ্ধতিতে শিক্ষার্থীর স্মৃতিশক্তির প্রভাব নেই, বুদ্ধির ব্যবহার বেশী। তাই বিশ্লেষণী পদ্ধতিতে গণিত শিক্ষালাভ করলে মানসিক শক্তির উৎকর্ষ সাধন সম্ভব।

সংশ্লেষণী ও বিশ্লেষণী পদ্ধতি দুটি পরস্পরের ওপর নির্ভরশীল এবং গণিত শিক্ষণে কোনটিকেই বাদ দেওয়া যায় না। বিশ্লেষণী পদ্ধতিতে প্রমাণ আবিষ্কার করে সংশ্লেষণী পদ্ধতিতে উপস্থাপিত করা হয় গণিতে। প্রমাণে বিভিন্ন ধাপের ব্যাখ্যা নিহিত থাকে বিশ্লেষণী পদ্ধতির মধ্যে।

বিশ্লেষণ ছাড়া সংশ্লেষণ একরোখা (dogmatic)। কিন্তু শ্রেণীকক্ষে গণিত শিক্ষাদানে বিশেষতঃ জ্যামিতি, বীজগণিত এবং তৎসম্পর্কযুক্ত গাণিতিক বিষয়গুলির ক্ষেত্রে **বিশ্লেষণ সহ সংশ্লেষণ বিশেষ কার্যকরী ও ফলপ্রদ।**

আরোহী ও অবরোহী পদ্ধতি (Inductive and deductive method):

আরোহী পদ্ধতির স্বরূপ

Inductive method বা **আরোহী পদ্ধতি** কতকগুলি বিশেষ **বিশেষ দৃষ্টান্ত থেকে সাধারণ সিদ্ধান্তে** (Particular to General) উপনীত হ'তে সাহায্য করে। এই বিশেষ বিশেষ দৃষ্টান্তগুলি সাধারণতঃ Concrete বা মূর্তবস্তুকে আশ্রয় ক'রে

অগ্রসর হয়। তারপর ঐ **মূর্তবস্তুকে অবলম্বন করে অমূর্ত বা বিমূর্ত (abstract) চিন্তাধারার দিকে যেতে হয়।**

1) Deductive method বা **অবরোহী পদ্ধতিতে সাধারণ সত্যকে ভিত্তি করে বিশেষ ক্ষেত্রের সত্যতা** (General to particular) প্রমাণ করা হয়। এখানে **বিমূর্ত** বা abstract **বস্তু থেকে মূর্ত** বা concrete চিন্তাধারার দিকে পৌছানো যায়। যে কোন **ত্রিয়বয়বী বাক্য** বা syllogism অবরোহী যুক্তির সুন্দর উদাহরণ :—সব মানুষ মরণশীল, রাম একজন মানুষ, অতএব রামও মরণশীল। অথবা অনুরূপ কোণগুলি সব সময় সমান। $\angle x$ ও $\angle y$ অনুরূপ কোণ, অতএব $\angle x = \angle y$।

অবরোহী পদ্ধতির স্বরূপ

2) অপরদিকে আরোহী যুক্তির সাহায্যে **অভিজ্ঞতার মাধ্যমে** যে কোন সিদ্ধান্তে বা নানারূপ পরীক্ষা নিরীক্ষার মাধ্যমে যে কোন **সাধারণ নিয়মে উপনীত** হওয়া যায়। যেমন :

"কোন গ্যাসীয় পদার্থের ওপর চাপ প্রয়োগ করলে তার তাপমাত্রা বৃদ্ধি পায়" অর্থাৎ আমরা সিদ্ধান্তে আসতে পারি যে চাপ প্রদান করলে সমস্ত গ্যাসেরই তাপমাত্রা বৃদ্ধি পাবে। কিংবা 15, 324, 4518, 6039 সংখ্যাগুলির প্রত্যেকটিই 3 দ্বারা বিভাজ্য কারণ প্রত্যেকটি সংখ্যার অংকসংখ্যাগুলির যোগফল 3 দ্বারা বিভাজ্য। তাহলে আমরা সিদ্ধান্ত করতে পারি যে, যে সমস্ত সংখ্যার অংকসংখ্যাগুলির যোগফল 3 দ্বারা বিভাজ্য, তারা প্রত্যেকেই 3 দ্বারা বিভাজ্য।

আরোহী যুক্তি

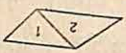
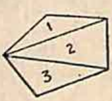
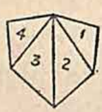
3) **আরোহী যুক্তিকে সম্পূর্ণরূপে চূড়ান্ত হিসাবে ধরা যায় না।** এটা কেবল মাত্র **সিদ্ধান্ত বা লক্ষ্যের** কিছুটা **সম্ভাব্যতা প্রকাশ করে** মাত্র। এই সম্ভাব্যতা বহুসংখ্যক ঘটনার পর্যবেক্ষণের সাহায্যেই প্রকাশিত হয়। সেজন্যই গাণিতিক তথ্য অনুসন্ধানের ক্ষেত্রে এটা কার্যকরী। তাই আরোহী পদ্ধতিকে বলা হয় সঠিক গণিতের পদ্ধতি।

আরোহী যুক্তির সম্ভাব্যতা

আরোহী ও অবরোহী পদ্ধতির প্রয়োগ :

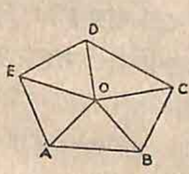
সমস্যা ১। বহুভুজের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি নির্ণয়ের সাধারণ সূত্র বার করতে হবে।

আরোহী পদ্ধতি (Inductive method) ঃ

চিত্র	বহুভুজের বাহু সংখ্যা	একটি নির্দিষ্ট শীর্ষ বিন্দু থেকে অঙ্কিত কর্ণ দ্বারা বিভক্ত ত্রিভুজের সংখ্যা	ক্ষেত্রটির অন্তঃকোণ-গুলির সমষ্টি = কত 2 সম ∠	ক্ষেত্রটির অন্তঃকোণের সমষ্টি = কত সম ∠
	4	2 বা (4 − 2)	2 × 2 সম ∠	4 সম ∠
	5	3 বা (5 − 2)	3 × 2 সম ∠	6 সম ∠
	6	4 বা (6 − 2)	4 × 2 সম ∠	8 সম ∠
n-সংখ্যক ভুজ বিশিষ্ট ক্ষেত্র	n	$n-2$	$(n-2)\times 2$ সম ∠	$(2n-4)$ সম ∠

সুতরাং উপরের ছক থেকে চতুর্ভুজ, পঞ্চভুজ, ষড়ভুজ প্রভৃতি বিশেষ বিশেষ দৃষ্টান্তগুলির পরিপ্রেক্ষিতে আমরা n-সংখ্যক ভুজ বিশিষ্ট ক্ষেত্রের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি নির্ণয়ের সাধারণ সূত্র নির্ণয় করলাম।

অবরোহী পদ্ধতি (Deductive method) ঃ



ABCDE একটি বহুভুজ যার বাহুসংখ্যা মনে করি n। এর অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি নির্ণয় করতে হবে।

ক্ষেত্রটির অন্তঃস্থ O যে কোন একটি বিন্দু নিয়ে কৌনিক বিন্দুগুলির সংগে যোগ করলে n সংখ্যক ত্রিভুজে বিভক্ত হবে। n সংখ্যক ত্রিভূজের সমস্ত কোণের সমষ্টি থেকে অর্থাৎ $2n$ সম ∠ থেকে, O বিন্দুস্থিত কোণ সমূহের সমষ্টি অর্থাৎ 4 সম ∠ বিয়োগ করলে, n সংখ্যক ভুজবিশিষ্ট ক্ষেত্রের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি নির্ণয়ের সাধারণ সূত্র অর্থাৎ $(2n-4)$ সম ∠ পাওয়া যাবে।

সমস্যা ২।

m ও n অখণ্ড ধনরাশি হলে প্রমাণ করতে হবে

(i) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

(ii) $a^m \div a^n = a^{m-n}$

(iii) $(a^m)^n = a^{mn}$.

আরোহী পদ্ধতিঃ

(i) $a^2 \times a^3 = (a \times a) \times (a \times a \times a) = a^5 = a^{2+3}$

$b^3 \times b^4 = (b \times b \times b) \times (b \times b \times b \times b) = b^7 = b^{3+4}$

$x^5 \times x^7 = (x \times x \times x \times x \times x) \times (x \times x \times x \times x \times x \times x \times x) = x^{12}$
$= x^{5+7}$

$\therefore \quad a^m \times a^n = a^{m+n}$.

(ii) $a^3 \div a^2 = \dfrac{a^3}{a^2} = \dfrac{a \times a \times a}{a \times a} = a^1 = a^{3-2}$

$x^7 \div x^5 = \dfrac{x^7}{x^5} = \dfrac{x \times x \times x \times x \times x \times x \times x}{x \times x \times x \times x \times x}$

$= x^2 = x^{7-5}$

$\therefore \quad a^m \div a^n = a^{m-n}$.

(iii) $(a^3)^2 = a^3 \times a^3 = a^{3+3} = a^6 = a^{3 \cdot 2}$

$(b^4)^3 = b^4 \times b^4 \times b^4 = b^{4+4+4} = b^{12} = b^{4 \cdot 3}$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

অবরোহী পদ্ধতিঃ

(i) $a^m \times a^n = (a \,.\, a \,.\, a \cdots m$ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত)
$\times (a \,.\, a \,.\, a \cdots n$ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত)

$= a \,.\, a \,.\, a \cdots (m+n)$ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত

$= a^{m+n}$.

(ii) $a^m \div a^n = \dfrac{a \,.\, a \,.\, a \ldots m \text{ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত}}{a \,.\, a \,.\, a \ldots n \text{ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত}}$

$= a \,.\, a \,.\, a \cdots (m-n)$ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত

[কারণ $m > n$, লব ও হরের n সংখ্যক a' কেটে যাবে]

$= a^{m-n}$.

(iii) $(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \cdots n$ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত

$= a^{m+m+m\cdots}$ n সংখ্যক উৎপাদক পর্যান্ত

$= a^{mn}$.

অবরোহ যুক্তি প্রণালী আরম্ভই হয় **স্বজ্ঞামূলক স্বীকার্য** বা স্বতঃসিদ্ধের সাহায্যেই। যা দেখেই সত্য বলে বোঝা যায় তাকেই স্বজ্ঞালব্ধ জ্ঞান বলে। যেখানে স্বজ্ঞা সরাসরি কাজ করে না, সেখানে আরোহী পদ্ধতি অবলম্বন ক'রে কয়েকটি দৃষ্টান্ত থেকে কখনও কখনও পরীক্ষার মাধ্যমে সাধারণ সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়াই প্রারম্ভিক স্তরে শ্রেষ্ঠ উপায়।

আরোহী যুক্তিতে স্বজ্ঞা ও পরীক্ষা (Intuition and Experiment in Induction)

যেমন, কোন বিষমবাহু ত্রিভুজের বৃহত্তর বাহুর সম্মুখীন কোণ বৃহত্তর—এটা প্রত্যক্ষের মাধ্যমে স্বজ্ঞার দ্বারাই বোঝা যায়। কিন্তু ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ—এটি প্রমাণ করার সময় স্বজ্ঞা সরাসরি কাজ করবে না। সেখানে বিভিন্ন ধরনের ত্রিভুজ এঁকে প্রত্যেক ক্ষেত্রে অন্তঃকোণগুলি মেপে পৃথকভাবে সমষ্টি দুই সমকোণ নির্ণয় করে সাধারণ সিদ্ধান্তে আসতে হবে।

সমালোচনা ঃ আরোহী পদ্ধতি **মনোবিজ্ঞানসম্মত**। কিন্তু অবরোহী পদ্ধতি **যুক্তিসম্মত**। আরোহী পদ্ধতি **দীর্ঘ ও ক্লান্তিকর**, অবরোহী পদ্ধতি **সংক্ষিপ্ত**। **আবিষ্কারকের জন্য আরোহী** কিন্তু **শিক্ষার্থীর জন্য অবরোহী**। আরোহী পদ্ধতিতে মানসিক ক্ষমতা হয় উন্নত। **অবরোহী পদ্ধতিতে স্মৃতির কাজই বেশী**।

তবে আরোহী পদ্ধতিতে প্রাপ্ত **সিদ্ধান্তগুলি** সব সময়ই **অবশ্যম্ভাবী** বা নিশ্চিত নয়। তবে সিদ্ধান্তগুলি অবশ্যই সম্ভাব্য। যতবেশী সংখ্যক ক্ষেত্রে আরোহমূলক সিদ্ধান্তটি প্রযোজ্য হবে ততই এটির সঠিক ও সত্য হবার সম্ভাবনা বেড়ে যাবে। কিন্তু তা হলেও আরোহ অনুমানকে নিশ্চিত বলা যায় না। যেমন ঃ n^2+n-1 একটি মৌলিক সংখ্যা, যখন $n=1, 2, 3, 4, 5$ বা 6।

সুতরাং স্বাভাবিকভাবে এটি সম্ভাব্য মনে হয়। কিন্তু $n=7$ হলে $n^2+n-1=5$৫ এবং মৌলিক নয়।

এখন আরোহ অনুমানে সত্যতা নির্ণয় করার জন্য প্রয়োজন **গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি** (Mathematical Induction)। প্রণালীটি এমন হওয়া দরকার যেন নিঃসন্দেহে বোঝা যায় যে সূত্রটি সকল ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য।

গাণিতিক আরোহ

মনে করা যাক, আরোহী পদ্ধতিতে দেখা গেল যে n-সংখ্যক ভুজের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি $= 2(n-2)$ সম$< = (2n-4)$ সম$<$। কিন্তু n এর যে কোন একটি নির্দিষ্ট মানের জন্য সূত্রটি সত্য ধরে নিয়ে যদি আমরা দেখাতে পারি যে nএর অন্য যে কোন মানের জন্য সূত্রটি সত্য, তাহলে গণিতে সূত্রটির সত্যতা প্রমাণিত হয়। এই পদ্ধতিকেই গাণিতিক আরোহী পদ্ধতি বলে।

মনে করা যাক, উপরের সূত্রটিতে $n=m$, তখন সূত্রটি সত্য। অর্থাৎ m সংখ্যক ভুজের অন্তঃকেণের সমষ্টি $= 2(m-2)$ সম$<$ বা $(2m-4)$ সম$<$, $n=m+1$ হলে $(m+1)$ সংখ্যক ভুজের অন্তঃকোণের সমষ্টি $= 2(m+1-2)$ সম$< = \{2(m+1)-4\}$ সম$<$, $n=m+2$ হলে সূত্রটি দাঁড়ায় $= 2(m+2-2)$ সম$< = \{2(m+2)-4\}$ সমকোণ। সুতরাং n এর যে কোন মানে সূত্রটি সত্য এবং অভ্রান্ত।

বিত্যালয়ে গণিত শিক্ষায় আরোহী-অবরোহী পদ্ধতি ঃ

(১) **আরোহী পদ্ধতিতেই গণিত সুরু** করা উচিত; পরে প্রয়োজন হলে অবরোহী পদ্ধতি অবলম্বন করা উচিত।

(২) পাঠ্যপুস্তক ও **শিক্ষকের পক্ষে অবরোহী পদ্ধতি সুবিধাজনক**। আরোহী পদ্ধতি অনেক সময় বিরক্তিকর লাগে। সেদিক থেকে অবরোহী পদ্ধতি অনেক কাম্য ও সন্তোষজনক।

(৩) কোন **সূত্র নির্ণয় করার** সময় **আরোহী পদ্ধতিই শ্রেয়। প্রমাণিত সূত্র বা তথ্য উপস্থাপনের** ক্ষেত্রে **অবরোহী পদ্ধতি অবলম্বন** করা চলে।

(৪) অবরোহী পদ্ধতি প্রয়োগ করার আগে আরোহী পদ্ধতি প্রয়োগ করা উচিত।

(৫) গণিত শিক্ষার লক্ষ্যই হবে **আরোহী ও অবরোহী পদ্ধতির সমন্বয় সাধন**।

(৬) গাণিতিক সিদ্ধান্তের ক্ষেত্রে অবরোহ প্রমাণ নিঃসন্দেহে শ্রেষ্ঠ তবে নতুন আবিষ্কার, সূত্রনির্ণয়, প্রভৃতির ক্ষেত্রে পরীক্ষা, পর্য্যবেক্ষণ ও স্বজ্ঞার পরিপ্রেক্ষিতে ও আরোহী যুক্তির সহায়তায় সিদ্ধান্তগুলির উপস্থাপন বেশী কার্য্যকরী ও ফলপ্রদ। তাই বলা হয় "Deduction is a process peculiarly appropriate to a final statement of mathematical results ; but for the

পরীক্ষা, পর্যবেক্ষণ ও স্বজ্ঞার স্থান

exploration of new fields induction, aided by intuition and experiment, would be best suited."

সুতরাং উপরোক্ত আলোচনা থেকে এটাই সিদ্ধান্ত করা যায় "Mathematics in the finished form is deductive but in the making, inductive."

আবিষ্কারকের পদ্ধতি (Heuristic method)

Heuristic শব্দটির উদ্ভব গ্রীক শব্দ "Heurisco" যার অর্থ হ'ল "I find"। বৈজ্ঞানিক যেমন আবিষ্কারের আনন্দে "পেয়েছি, পেয়েছি"—বলে চীৎকার করেছিলেন, গণিতের অনুসন্ধিৎসু শিক্ষার্থীও যেন সেইভাবে গাণিতিক তথ্য ও সত্য আবিষ্কারের মাধ্যমে আত্মপ্রত্যয় সৃষ্টি করতে পারে। উপস্থাপিত কিংবা সংগৃহীত তথ্য থেকে স্বচেষ্টায় সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়ার পদ্ধতিই হ'ল Heuristic পদ্ধতি।

Heuristic পদ্ধতির সংজ্ঞা

শিশু শিক্ষাপ্রণালী নির্ধারণে আমাদের চেষ্টা হবে শিশু যাতে নিজেই শিখতে পারে, জানতে পারে। Heuristic পদ্ধতির গোড়ার কথাই হ'ল **শিক্ষার্থীরা নিজে নিজেই তাদের শিক্ষনীয় বিষয় শিখবে**। একদিন মানুষ ব্যক্তিগত বা সমষ্টিগত প্রচেষ্টায় অথবা আকস্মিকভাবে যে নতুন তথ্যের সন্ধান পেয়েছিল সেই অভিজ্ঞতা আজ সামাজিক সম্পদে পরিণত হয়েছে। সেই ভাবে Heuristic পদ্ধতিতে শিশুকে এমন প্রণালী অনুসরণ করতে উৎসাহী করতে হবে যাতে তারা অগ্রগামী হয়ে নতুন জ্ঞানের সন্ধান করে।

Heuristic পদ্ধতিতে **শিক্ষক ও ছাত্রকে চিন্তা করতে** হবে **স্বাধীনভাবে**। স্বেচ্ছাসংগৃহীত জ্ঞান হয় খাঁটি ও বাস্তব। শিক্ষকের কাছে নিষ্ক্রিয়ভাবে গ্রহণের পরিবর্তে ছাত্রদের স্বাধীন ও সক্রিয় মৌলিকত্বের শিক্ষা দেয় এই পদ্ধতি। বস্তুতঃ সক্রিয়তাই এই পদ্ধতির মূল কথা। John Dewey বলেছেন "Passivity is the opposite of thought; It is not only a sign of failure to call our judgement and personal understanding, but it also dulls curiosity, generates mind's wandering and causes learning to be a task instead of delight." বস্তুতঃ **চিন্তা** (thought), **বিচারক্ষমতা** (jndgement), **কৌতুহল** (curiosity) এবং **আনন্দ** (delight) **সৃষ্টিই** Heuristic পদ্ধতির **মূলশক্তি**।

Heuristic পদ্ধতির চরিত্র

তার অর্থ এই নয় যে, শিক্ষক সবসময় নিষ্ক্রিয় থাকবেন। শিক্ষক স্বাভাবিক অবস্থার পরিপ্রেক্ষিতে ছোট ছোট প্রশ্নের মাধ্যমে শিক্ষার্থীকে আবিষ্কারে সাহায্য করবেন। প্রয়োজন হ'লে ছাত্রদের ইঙ্গিতও দেবেন। তবে ইঙ্গিতগুলো যেন শিক্ষার্থীর আয়ত্তাধীন হয়।

প্রশ্নোত্তরের ভেতর দিয়ে অগ্রসর হ'লেই আবিষ্কারকের প্রণালী অনুসরণ করা হয় না। কেননা, বিশ্লেষণ প্রণালীতেও প্রশ্নোত্তরের মাধ্যমে অগ্রসর হতে হয়।

বিশ্লেষণ ও আবিষ্কারকের পদ্ধতির মধ্যে পার্থক্য

তবে Heuristic method এবং Analytic method এর পার্থক্যটা কোথায়? দুই-এর মধ্যে প্রভেদ এই যে, আবিষ্কারকের প্রণালীতে শিক্ষকের ইঙ্গিত পেলেও শিক্ষার্থীকে নিজের থেকে অগ্রসর হবার সুযোগ দিতে হয় বেশী। কিন্তু বিশ্লেষণ প্রণালীতে বিশ্লেষণটাই মুখ্য উদ্দেশ্য। পথচালনা ও বিশ্লেষণের ভার শিক্ষকও নিতে পারেন। কিন্তু আবিষ্কারকের প্রণালীতে শিক্ষক উপযুক্ত প্রশ্নের দ্বারা পথচালনায় সাহায্য করেন। কিন্তু পথ খুঁজে বার করে শিক্ষার্থী নিজে। তাই **বিশ্লেষণ হ'ল একটা উপায়।** আর **আবিষ্কার করা একটা লক্ষ্য। আবিষ্কারের জন্যই বিশ্লেষণ।**

Heuristic পদ্ধতিতে আরোহী প্রণালী অবলম্বন করেও শিক্ষা দেওয়া হয়। কতকগুলি জানা তথ্য থেকে শিক্ষার্থী অজানা জ্ঞানের সন্ধান লাভ করে।

আবিষ্কারক ও আরোহী পদ্ধতি

শিক্ষার্থী নিজের চেষ্টায় বই থেকে, যন্ত্রপাতির সাহায্যে পরীক্ষা-নিরীক্ষার মাধ্যমে নানা তথ্য সংগ্রহ ক'রে জ্ঞানের নতুন ক্ষেত্রে প্রবেশ করতে সক্ষম হয়। এই পদ্ধতিতে এমন এক শিক্ষাপ্রণালী অনুসৃত হয় যার ফলে শিক্ষার্থী কেবল কতকগুলি নিয়ম বা তথ্যই শেখে না বরং তার মনটি হয় অনুসন্ধানী।

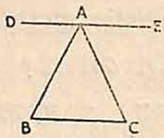
অন্যদিক থেকে বিচার করলে বা বাস্তব ক্ষেত্রে Heuristic পদ্ধতি কোন পৃথক পদ্ধতিই নয়। শিক্ষার্থীকে চিন্তাশীল আবিষ্কারকের ভূমিকা পালন করতে উদ্বুদ্ধ করার জন্য যে কোন পঠন পদ্ধতিই Heuristic পদ্ধতিরূপে গ্রহণযোগ্য। তাই বলা হয় "Heuristic method is the essence of all the methods"। এই পদ্ধতিটি প্রথমে Prof H. E. Armstrong বিজ্ঞান শিক্ষার ক্ষেত্রে প্রয়োগ করেন। পরবর্তীকালে দেখা গেল যে, এই পদ্ধতি অন্যান্য বিষয় শিক্ষার ক্ষেত্রেও অত্যন্ত কার্যকরী ও ফলপ্রদ। গণিত শিক্ষার ক্ষেত্রেও এটির মূল্য ও গুরুত্ব কম নয়। বিশেষতঃ জ্যামিতি শিক্ষার ক্ষেত্রে এর স্বীকৃতি সর্বসম্মত। তাছাড়া

আবিষ্কারক পদ্ধতির মূল্য

পাটীগণিতের সমস্যা বিশ্লেষণ ও বীজগণিতের আরোহমূলক সূত্র এবং অবরোহমূলক সিদ্ধান্তে যাওয়ার হদিস আবিষ্কারে এই পদ্ধতি সার্থকভাবে প্রয়োগ করা যায়।

Heuristic পদ্ধতির প্রয়োগ :

সমস্যা : (১) প্রমাণ করতে হবে ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ।



শিক্ষকের প্রশ্ন	শিক্ষার্থীর উত্তর
১। কি প্রমাণ করতে হবে?	১। ABC ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সম ∠।
২। কোণ তিনটির নাম কি?	২। ∠ABC, ∠BCA এবং ∠CAB
৩। দুই সমকোণকে আর কি ধরণের কোণ বলা হয়?	৩। সরল কোণ।
৪। ∠ABC+∠BCA+∠CAB=আর কি কোন প্রমাণ করা যেতে পারে?	৪। ∠ABC+∠BCA+∠CAB=এক সরল কোণ।
৫। এখানে ঐ তিনটি কোণের যে কোণ একটিতে মনে কর ∠BACতে কিভাবে সরল কোণ আঁকা যাবে?	৫। A বিন্দু দিয়া যে কোন একটি সরলরেখা DE টানলে ∠DAE= এক সরল কোণ হবে।
৬। ∠DAEতে কয়টি কোণ রয়েছে ও তাদের নাম কি কি?	৬। তিনটি কোণ, যথাক্রমে ∠BAD, ∠BAC এবং ∠CAE
৭। ∠BAD+∠BAC+∠CAE-এর সঙ্গে কার সমান প্রমাণ করতে হবে?	৭। ∠BAD+∠BAC+∠CAE=∠ABC+∠BAC+∠ACB প্রমাণ করতে হবে।
৮। উভয় পক্ষের মধ্যে সাধারণ কোণ কি?	৮। ∠BAC

৯। তাহলে ∠BAD+CAE =কি দেখাতে হবে?	৯। ∴ ∠BAD+∠CAE =∠ABC+∠ACB দেখাতে হবে?
১০। কিভাবে তা করা যাবে?	১০। A বিন্দু দিয়ে DE ∥ BC টানলে ∠ABC=একান্তর ∠BAD এবং ∠ACB=একান্তর ∠CAE হবে
১১। তাহলে কীভাবে ∠ABC +∠ACB+∠BAC=2সম∠ প্রমাণ করবে?	১১। DE ∥ BC, AB ছেদক ∴ ∠ABC=একান্তর ∠BAD AC ছেদক, ∴ ∠ACB=একান্তর ∠CAE ∴ ∠BAD+∠CAE=∠ABC+ ∠ACB উভয়পক্ষে ∠BAC যোগ করলে ∠BAD+∠BAC+∠CAE =∠ABC+∠BAC+∠ACB ∴ ∠ABC+∠BAC+∠ACB =1 সরলকোণ =দুই সম ∠

সমস্যা ঃ (২) কোন ভগ্নাংশের হরের সহিত 1 যোগ করলে ভগ্নাংশটী হয় $\frac{1}{3}$; কিন্তু হরের সঙ্গে 5 যোগ করলে ভগ্নাংশটী $\frac{1}{4}$ হয়। ভগ্নাংশটী কত?

প্রঃ একটা অজানা ভগ্নাংশকে বীজগণিতে কিভাবে লেখা যায়?

উঃ লবকে x এবং হর y ধরে ভগ্নাংশটাকে লিখতে হবে $\frac{x}{y}$।

প্রঃ প্রথম সর্তানুযায়ী ভগ্নাংশটি কী হবে?

উঃ ভগ্নাংশটি $\frac{x}{y+1}$ হবে।

প্রঃ দ্বিতীয় সর্তানুযায়ী ভগ্নাংশটীকে কিভাবে লিখবে?

উঃ ভগ্নাংশটীকে $\frac{x}{y+5}$ হিসাবে লিখতে হবে।

প্রঃ সর্ত অনুযায়ী ঐ দুটি ভগ্নাংশের মান কিভাবে লেখা যায়?

উঃ $\frac{x}{y+1} = \frac{1}{3}$ এবং $\frac{x}{y+5} = \frac{1}{4}$ হিসাবে লেখা যায়।

প্রঃ এখন x ও yর মান কি ভাবে পাবে?

উঃ সমাধানের সাহায্যে।

প্রঃ। কি ভাবে করবে বল ?

উঃ $\frac{x}{y+1} = \frac{1}{3}$ বা $3x=y+1$

বা $3x-y=1$ ...(1)

আবার $\frac{x}{y+5} = \frac{1}{4}$ বা $4x=y+5$

বা $4x-y=5$ ...(2)

(1) ও (2) হইতে

$$\begin{array}{r} 3x-y=1 \\ 4x-y=5 \\ -\quad+\quad- \\ \hline -x=-4 \end{array}$$

বিয়োগ করিয়া, $-x=-4$

$\therefore\ x=4$

x র মান (1) এ বসালে $3.4-y=1$ বা $12-y=1$

বা $-y=1-12$ বা $-y=-11$ বা $y=11$

প্রঃ তাহলে ভগ্নাংশটি কত ?

উঃ $\frac{x}{y} = \frac{4}{11}$

Heuristic পদ্ধতির সুবিধা-অসুবিধা :

সুবিধা :

(১) শিক্ষার্থীরা **স্বাধীন চিন্তা** করতে শেখে।

(২) তারা **সক্রিয় আবিষ্কারকের** ভূমিকা নিতে পারে।

(৩) তারা **সম্যক ও বাস্তব জ্ঞান** অর্জন করতে পারে।

(৪) তারা **নিজেদের কাজে** নিজেরাই **আগ্রহান্বিত** হয়।

(৫) **শিক্ষকশিক্ষার্থীর সম্পর্ক** হয় নিগূঢ়।

(৬) গৃহকাজের চাপ না থাকায় **শিক্ষার্থীদের মন হয় আনন্দপূর্ণ।**

(৭) **অর্জিত জ্ঞান হয় ফলপ্রদ।**

(৮) **তত্ত্ব ও তথ্য ভুলে যাওয়ার সম্ভাবনা থাকে কম।**

(৯) শিক্ষার্থীদের **বিশ্লেষণী শক্তি বাড়ে।**

অসুবিধা :

(১) নতুন শিক্ষার্থীদের পক্ষে অসুবিধাজনক।

(২) পদ্ধতিটির প্রয়োগ **সময়সাপেক্ষ।**

(৩) শিক্ষকদের পক্ষে অসুবিধাজনক, কারণ, বিশেষ ভাবে প্রস্তুত হয়ে শ্রেণীতে না গেলে নির্দেশনা দেওয়া শক্ত হয়ে পড়ে।

(৪) নির্দিষ্ট পাঠ্যপুস্তক অনুসৃত হয় না।

(৫) শিক্ষকদের **নির্দেশনা** শিক্ষার্থীদের কাছে অনেক সময় **অবোধ্য বা দুর্বোধ্য** হয়, ফলে শিক্ষক সম্পর্কে শিক্ষার্থীর ধারণা হয় বিরূপ।

Heuristic পদ্ধতি অবলম্বনে সতর্কতা

তাই এই পদ্ধতিতে পড়াতে হ'লে আগে শিক্ষককে পদ্ধতিটি ভাল করে আয়ত্ত করে নিতে হবে। এই পদ্ধতি মানে পুস্তকহীন শিক্ষাদান নয়। অন্ততঃ গোড়ার দিকে শিক্ষক বইয়ের ব্যবহার কখনই ছাড়বেন না। শিক্ষকের নিজের মনে আবিষ্কারের ভাব জাগাতে হবে। আর তারজন্য প্রয়োজন গভীর ভাবে ও বিশদভাবে বিষয়টি পাঠ করা। শিক্ষকমহাশয় যে কোন পাঠ্য বিষয় শ্রেণীর সামনে তুলে ধরবেন এবং শিক্ষার্থীর উত্তর ও সমাধানের সামগ্রী জোগাতে চেষ্টা করবেন। এই পদ্ধতিতে শিশুই কেন্দ্রস্থল ও প্রধান বলে এই পদ্ধতিটি মনোবিজ্ঞান সম্মত পদ্ধতির অন্তর্ভুক্ত।

পরীক্ষাগার পদ্ধতি (Laboratory method)

পরীক্ষাগার পদ্ধতিতে আরোহী ও আবিষ্কারকের পদ্ধতির স্থান

শিক্ষার্থীদের সক্রিয়তা ও আবিষ্কারে উদ্বুদ্ধ করাই পরীক্ষাগার পদ্ধতির মুখ্য ও বাস্তব উদ্দেশ্য। একদিক থেকে একে বলা যায় **"মূর্ত বস্তু থেকে বিমূর্ত ধারণায়"** উপনীত হওয়ার পদ্ধতির পরিবর্ধিত সংস্করণ। এটাকে **আরোহী পদ্ধতির পরীক্ষামূলক দিক** হিসাবেও ব্যাখ্যা করা হয়। আবার একে, **আবিষ্কার পদ্ধতির ব্যবহারিক** বা **প্রয়োগের দিক** হিসাবেও বর্ণনা করা হয়। গণনা, পরিমাপ, অঙ্কন, কাগজ ভাঁজকরা প্রভৃতির মাধ্যমে শুধুমাত্র জানা বা জ্ঞাত তথ্যেরই ব্যাখ্যা করে না বরং নতুন তথ্য আবিষ্কার, নতুন নীতির সাধারণীকরণ ও প্রতিস্থাপনও এদের কাজ। বিজ্ঞানের পরীক্ষাগারে যে ভাবে বৈজ্ঞানিক যন্ত্রপাতি দিয়ে সাজানো হয়, গণিতের শ্রেণীকক্ষটিকেও সেইভাবে গাণিতিক যন্ত্রপাতি দিয়ে সাজানো হয়, এইজন্যই গণিতের শ্রেণীকক্ষকেও গণিতের পরীক্ষাগার বলা হয়।

পরীক্ষাগার পদ্ধতির বর্ণনা

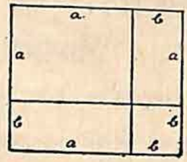
পরীক্ষাগারের যন্ত্রপাতিগুলি লেখচিত্র সংক্রান্ত ও বিভিন্ন স্তরে বাস্তব পরীক্ষা চালানোর উপযোগী সাজসরঞ্জাম। এই পরীক্ষাগারে থাকবে গণিতের ছবি আঁকার যন্ত্রপাতি, স্কেল, সার্ভেচেন, দাঁড়িপাল্লা,

কার্ডবোর্ডের বিভিন্ন মডেল, চার্ট, গোলক, ঘনক, প্রিজম, শঙ্কু, চোঙ, সেক্সট্যান্ট, কাঁচি, বিভিন্ন রং, কপিকল, লিভার, ফিতা, প্রভৃতি।

পরীক্ষাগার পদ্ধতির বৈশিষ্ট্য

গাণিতিক তথ্য আবিষ্কারে পদ্ধতিটি **যথেষ্ট উৎসাহদান** করে। এই পদ্ধতিতে বক্তৃতাপদ্ধতির অসুবিধাগুলি দূর করার চেষ্টা হয়েছে। **আবিষ্কার ও কাজের মাধ্যমে শেখা** এই দুটোর ওপরেই বেশী জোর দেওয়া হয়। শিক্ষার্থীরা নিজেরাই পরীক্ষা পরিচালনা করে এবং গণিতের বিভিন্ন তত্ত্ব, তথ্য ও সূত্র বুঝতে সক্ষম হয়। তাই এই জ্ঞান হয় **মূর্ত ও সহজবোধ্য**।

পরীক্ষাগার পদ্ধতির প্রয়োগ ঃ



পরীক্ষা ঃ (১) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ সূত্রটি প্রমাণ করতে হবে।

a বাহুবিশিষ্ট একটিকার্ডবোর্ডের বর্গক্ষেত্র, b বাহু বিশিষ্ট একটি কার্ডবোর্ডের বর্গক্ষেত্র এবং a দৈর্ঘ্য ও b প্রস্থ বিশিষ্ট দুইটি আয়ত ক্ষেত্র পাশাপাশি বসিয়ে এবং প্রতিটি ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় ক'রে তাদের সমষ্টির সঙ্গে সমগ্র $a+b$ বাহু বিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সঙ্গে সমান দেখানো যায়।

পরীক্ষা ঃ (২) বৃত্তের ব্যাস ও ক্ষেত্রফলের সম্পর্ক নির্ণয় করতে হবে। বিভিন্ন ব্যাসের কয়েকটি কার্ডবোর্ডের বৃত্ত কাটতে হবে। প্রত্যেকটি ব্যাসের বর্গও কার্ডবোর্ড দিয়ে তৈরী করতে হবে। এখন প্রত্যেক বৃত্ত ও তার ব্যাসের বর্গের ওজন করতে হবে। তাহলে দেখতে পাওয়া যাবে,

বৃত্তের ওজন ঃ ব্যাসের বর্গের ওজন = 11 : 14 (প্রায়)

সুতরাং বৃত্তের ক্ষেত্রফল ঃ ব্যাসের বর্গ = 11 : 14 (প্রায়)

একে $\frac{11}{14}$ কে $\frac{22}{28}$ হিসাবে প্রকাশ করা যায়

$$\therefore \frac{22}{28} = \frac{22}{4\cdot7} = \frac{22}{7}\cdot\frac{1}{4} = \frac{\pi}{4} \quad \text{(প্রায়)}$$

তাহলে আরোহী পদ্ধতিতে এই নিয়মটি পাওয়া গেল যে, বৃত্তের ক্ষেত্রফল ঃ ব্যাসের বর্গ $= \pi : 4$

বা বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \frac{\pi}{4} \times (2r)^2 = \frac{\pi}{4} \times 4r^2 = \pi r^2$

পরীক্ষাগার পদ্ধতির সুবিধা-অসুবিধা :

সুবিধা : (১) গাণিতিক তথ্য আবিষ্কারের সহজ ও স্বাভাবিক পন্থা।

(২) পদ্ধতিটি মনস্তত্ত্ব নির্ভর ও বিজ্ঞান সম্মত।

(৩) পদ্ধতিটি চিত্তাকর্ষক ও হৃদয়গ্রাহী।

(৪) 'কাজের মাধ্যমে শিক্ষা'—মতবাদটির উপর বেশী জোর দেওয়া হয়েছে।

(৫) এই পদ্ধতিতে 'মূর্ত থেকে বিমূর্ত' ধারণায় উপনীত হওয়া যায়।

(৬) অর্জিত জ্ঞান স্থায়ী ও কার্যকারী হয়।

অসুবিধা :

(১) গণিতের সব তথ্য আবিষ্কৃত হয় না।

(২) গণিতের সব অধ্যায়েই এই পদ্ধতি সাহায্য করে না।

(৩) ছাত্র সংখ্যা বেশী হলে এই পদ্ধতি বিশেষ কার্য্যকরী হয় না।

(৪) পঠনের অগ্রগতি হয় ব্যাহত।

(৫) বেশীর ভাগ বিদ্যালয়ে পরীক্ষাগার রাখা সম্ভব নয়।

নির্দেশনামূলক পদ্ধতি (Assignment method) :

নির্দেশনামূলক পদ্ধতির চরিত্র

বর্তমান শিশুকেন্দ্রিক শিক্ষাব্যবস্থায় নির্দেশনা বা নির্দেশমূলক পদ্ধতির স্থান বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ। এই পদ্ধতি তাত্ত্বিক ও ব্যবহারিক উভয় প্রক্রিয়ার সমন্বয়ে সৃষ্ট এক নতুন পদ্ধতি। এখানে শিক্ষক নির্দেশ দেন ; শিক্ষার্থী **হাতে কলমে কাজ** করে। শিক্ষার্থীদের নির্দিষ্ট বিষয়ে পাঠক্রম বা Assignment দেওয়া হয়। শিক্ষার্থীরা সেগুলি বিদ্যালয়ের **নির্দিষ্ট ঘণ্টায় বা প্রয়োজন হ'লে বাড়ীতেও সম্পাদন** করতে পারে।

বৈশিষ্ট্য

এই Assignment পদ্ধতিতে পাঠের কিছু অংশ থাকবে **শিক্ষকের প্রত্যক্ষ কর্তৃত্বে** আর বাকী অংশে **শিক্ষার্থীর স্বাধীনতা** থাকবে। **তাত্ত্বিক ও ব্যবহারিক** প্রক্রিয়া পাশাপাশি চলবে।

বর্ণনা

নির্দিষ্ট Assignmentকে পরস্পর সম্পর্কযুক্ত **কয়েকটি অংশে ভাগ** করা হয়। প্রতি সপ্তাহে এইরকম এক একটি পাঠ্যাংশ সম্পর্কে শিক্ষার্থীকে নির্দেশ দেওয়া হয়। পাঠ্যাংশটি নির্বাচন করার পর সেই সম্পর্কে নির্দেশ ছাত্রদের মধ্যে যে কোন ভাবে প্রদান করতে হবে। এই নির্দেশনায় পাঠ্যাংশের কঠিন অংশের **ইঙ্গিতও** থাকতে পারে। এই

(৫) নির্দেশনা একই ধরণের হওয়ায় শিক্ষার্থীরা উত্তরপত্র নকল করতে পারে।

(৬) উত্তম গ্রন্থাগার ও পাঠ্যপুস্তকের অভাব।

(৭) যোগ্য শিক্ষকেরও অভাব।

তবে অন্যান্য পদ্ধতির তুলনায় এই পদ্ধতি অধিক ফলপ্রদ। কারণ পদ্ধতিটির মূল কথা হ'ল **বিজ্ঞান সম্মত শিশুকেন্দ্রিক মনোবিজ্ঞান ভিত্তিক গবেষণা ও শিক্ষা**। এই নির্দেশনা পদ্ধতির আর একটা দিক হ'ল যে, এই পদ্ধতির মাধ্যমে শিক্ষার্থীদের প্রগতির একটা লেখচিত্র বা যে কোন ধরনের রেকর্ড বিদ্যালয় বা শ্রেণী কক্ষে রাখা। এই **প্রগতিপত্র** ছাত্রের ব্যক্তিগত শিক্ষার উন্নতি নির্দেশ করে। তাই গণিত শিক্ষকের কর্তব্য প্রতিটি শিক্ষার্থীর জন্য পৃথকভাবে নির্দেশনামূলক কাজের একটা রেকর্ড রাখা, যা শিক্ষককে পরবর্তী নির্দেশনায় সাহায্য করবে।

নির্দেশনার প্রগতিপত্র

বর্তমানে শিক্ষণের ব্যাপারে নির্দেশনামূলক পদ্ধতির অনুরূপ অথচ আরও মনোবিজ্ঞান ভিত্তিক পদ্ধতির কথা শোনা যাচ্ছে যার নাম হ'ল Programmed Instruction বা **পরিকল্পিত নির্দেশনা**।

পরিকল্পিত নির্দেশনা

অপ্রধান শিক্ষা পদ্ধতিঃ

(১) **বক্তৃতা পদ্ধতি** (Lecture method): এ পদ্ধতি অনেকটা Heuristic পদ্ধতির বিপরীত। অনেক গণিত শিক্ষক আছেন যাঁরা মহাবিদ্যালয়ের শিক্ষাপদ্ধতির মত বক্তৃতার সাহায্যে নিজের মনে পড়িয়ে যান। কোনো প্রশ্ন করে জানতে চেষ্টাও করেন না যে শিক্ষার্থীরা শ্রেণীতে মনোযোগ দিচ্ছে কিনা? নিজের মনে ব্ল্যাক-বোর্ডে গাণিতিক সমস্যাবলী একের পর এক সমাধান ক'রে যান। শিক্ষার্থীরা অসহায়ভাবে নিষ্ক্রিয় হয়ে বসে থাকে কিংবা খাতায় লিখে নিতে বাধ্য হয়।

বক্তৃতাপদ্ধতি ধারণা

কম সময়ের মধ্যে পাঠক্রম শেষ করার জন্য এই পদ্ধতি খুবই কার্য্যকরী। তবে গণিত শিক্ষাদানে এই পদ্ধতির সাহায্যে বিষয়বস্তু সহজভাবে উপস্থাপন করা খুবই শক্ত। কোন শিক্ষক যদি বক্তৃতা পদ্ধতিতে গণিত শিক্ষাদান করেন তাঁকে কোনো না কোনো সময়ে Black-Board-এর ব্যবহার করতেই হবে। সুতরাং সেখানেই বক্তৃতা পদ্ধতির

বৈশিষ্ট্য

নির্দেশনায় কয়েকটি **প্রশ্নও** থাকবে। শিক্ষার্থী সেই প্রশ্নগুলির উত্তর লিখে **সংশোধনের** জন্য শিক্ষকের কাছে জমা দেবে। তবে উত্তর পত্র লেখার সময় শিক্ষার্থীর কোন অসুবিধা থাকলে তা জানবার জন্য শিক্ষকের কাছে যাতায়াতের দ্বার থাকবে উন্মুক্ত।

শিক্ষকমহাশয় শিক্ষার্থীর সংশোধিত উত্তরপত্র সম্পর্কে সন্তুষ্ট হলে তারপর তাকে নতুন নির্দেশনা দেবেন। এই পদ্ধতিতে শিক্ষার্থী নিজের শক্তি ও বুদ্ধি অনুযায়ী অগ্রসর হয়।

এই নির্দেশনা সম্পর্কে অনেকের ভুল ধারণা আছে। তাঁরা মনে করেন নির্দেশনা হচ্ছে কতকগুলি প্রশ্নগুচ্ছ। কিন্তু তা সম্পূর্ণ ভুল। নির্দেশনার **চারটে কাজ**ঃ

নির্দেশনার কাজ

(১) নির্দেশনা নির্দিষ্ট সময়ের কাজকে ব্যাখ্যা করে। এটি একটি চুক্তি এবং পঠন, লিখন ও সময়ে সময়ে মৌখিক প্রশ্নোত্তরের মাধ্যমে কার্য্য সম্পাদন।

(২) নির্দেশনা শিক্ষার্থীকে স্বাধীনভাবে চিন্তা ও কাজ করতে সাহায্য করে। তবে এই কাজে পরামর্শ ও ইঙ্গিতেরও স্থান রয়েছে।

(৩) নির্দেশনা হ'ল শিক্ষার্থীর পঠন-পাঠনের "Guide and help"।

(৪) নির্দেশনার মাধ্যমে শিক্ষার্থী তার পাঠ্যপুস্তক এবং গ্রন্থাগারের পুস্তকের ব্যবহার ক'রে প্রয়োজনীয় জ্ঞান আহরণ করতে পারে।

সুবিধাঃ (১) **আত্মবিশ্বাস** ও **আত্মনির্ভরশীলতা** বৃদ্ধি পায়।

(২) নিজ নিজ ক্ষমতা অনুযায়ী পাঠে অগ্রসর হয়।

(৩) নিষ্ক্রিয়তার বদলে **সক্রিয়তা বৃদ্ধি** পায়।

(৪) গ্রন্থাগার ব্যবহার করতে শেখে।

(৫) ব্যবহারিক প্রয়োগমূলক শিক্ষা সম্পর্কে **জ্ঞানার্জন ও বিজ্ঞানসম্মত গবেষণার স্পৃহা জাগে**।

অসুবিধাঃ (১) **শিক্ষকের পক্ষে ক্লান্তিকর**, কারণ প্রচুর উত্তরপত্র সংশোধন করতে হয় এবং সময়ে সময়ে মৌখিক প্রশ্নেরও আশ্রয় নিতে হয়।

(২) **সময় সাপেক্ষ**।

নির্দেশনার **ভাষা** সকলের **বোধগম্য হয় না**।

৪) **পঠনের গতি হয় মন্থর**।

মূলগত অর্থ হবে ব্যাহত। তাই গণিতশাস্ত্রে বক্তৃতা পদ্ধতি অচল, স্থান নেই বললেই চলে।

বিশেষতঃ বিদ্যালয়ে যেখানে শিক্ষার্থীদের ধর্মই হল সক্রিয়তা, সেখানে এই পদ্ধতি অচল হতে বাধ্য।

সুবিধাঃ (১) অল্প সময়ে অনেক বিষয় উপস্থাপন করা যায়।

(২) ছাত্র-সংখ্যা বেশী থাকলে এই পদ্ধতি কার্যকরী হয়।

(৩) শিক্ষকের কাজের সুবিধে হয় কারণ বক্তৃতাদানকালে বাধা প্রাপ্ত হন না।

(৪) পদ্ধতিটি সহজ, সংক্ষিপ্ত ও আকর্ষনীয়।

(৫) শিক্ষক-শিক্ষার্থী সম্পর্ক হয় মধুর কেননা পাঠসংক্রান্ত প্রশ্নোত্তর থেকে তারা রেহাই পায়।

(৬) নির্দিষ্ট পাঠ্যপুস্তক স্বচ্ছন্দে ব্যবহার করা যায়।

অসুবিধাঃ (১) শিক্ষার্থীর মনোযোগ হয় বিক্ষিপ্ত।

(২) নীরস বক্তৃতা গণিতের ভাবধারার প্রবাহকে বিচ্ছিন্ন ক'রে বিষয়টির প্রতি আগ্রহ নষ্ট করে।

(৩) বাড়ীর কাজের চাপ বেশী পড়ে।

(৪) শিক্ষক-শিক্ষার্থীর মধ্যে প্রত্যক্ষ যোগাযোগ ব্যাহত হয়।

(৫) স্বাধীন চিন্তার স্থান নেই।

(৬) বিষয়টির পরীক্ষামূলক দিকটা সম্পূর্ণরূপে অবহেলিত হয়।

(২) **ঐতিহাসিক পদ্ধতি** (Historical method): এই পদ্ধতির মূল কথাটিই হ'ল গণিতের বিষয়গুলি যেভাবে আবিষ্কৃত হয়েছিল সেইভাবে বিষয়টি পড়ানো। মানবসমাজ **বিভিন্ন অভিজ্ঞতার মাধ্যমে প্রয়োজনের খাতিরে** গণিতের বিভিন্ন **সূত্র ও তথ্য আবিষ্কার** করেছে। শিক্ষার্থীদেরও ঐসব অভিজ্ঞতার ভিতর দিয়ে শিক্ষা পরিচালনা করলে শিক্ষা সম্পূর্ণ হবে, বিষয়টি ঠিকমত বুঝতে পারবে। এই **পদ্ধতির ধাপগুলি** হ'ল (১) তথ্যানুসন্ধান (২) বিশ্লেষণ (৩) মূল্যায়ন (৪) শ্রেণীবদ্ধকরণ ও (৫) সমন্বয় সাধন।

ঐতিহাসিক পদ্ধতি ও তার স্তর

বৈশিষ্ট্য

এই পদ্ধতিটি **মনোবিজ্ঞান সম্মত ও মূর্ত থেকে বিমূর্ত ধারণাতে** উপনীত হবার নীতির ওপর প্রতিষ্ঠিত। এই পদ্ধতিতে শিক্ষা দিলে শিক্ষা জীবনধর্মী, বাস্তব ও ফলপ্রদ হয়। পদ্ধতিটি শিক্ষার্থীদের গণিতশিক্ষার প্রতি আগ্রহান্বিত করে তোলে। নীচু ক্লাসে পদ্ধতিটি অনেকাংশে কার্য্যকরী।

সমালোচনা

তবে এই পদ্ধতি অনুযায়ী **পাঠক্রম রচনা করা শক্ত**। শিক্ষণপদ্ধতিও **সময় সাপেক্ষ**। নতুন বিষয় শিক্ষা দিতে অসুবিধা হয়। উঁচু ক্লাসে পদ্ধতিটি কার্যকরী নয়।

একরোখা পদ্ধতির বর্ণনা

(৩) **একরোখা পদ্ধতি** (Dogmatic method): এই পদ্ধতিটি সত্যই একরোখা। কেননা প্রতি পদক্ষেপে কঠোর নিয়ম-কানুন অনুসরণ ক'রে নির্ভুল উত্তরে আসতে হবে। এমন কি ভাষা ও বানান পর্য্যন্ত নির্ভুল হওয়া চাই। অনেকে বলেন এই পদ্ধতি অবলম্বন না করবার ফলেই গণিতে ব্যর্থতা। তাই মুখস্থ-ভিত্তিক নির্ভুল উপস্থাপনের ক্ষেত্রে এই পদ্ধতি অদ্বিতীয়।

বর্ণনা

এই পদ্ধতি অনুসারে বুঝতে না পারলেও গাণিতিক সংজ্ঞা, নিয়ম, সূত্র হুবহু মুখস্থ করতে হবে এবং অন্ধভাবে অনুসরণ ক'রে তাদের প্রয়োগ করতে হবে।

বৈশিষ্ট্য ও সমালোচনা

এই পদ্ধতি অবলম্বনে গণিত শিক্ষায় সময়-সংক্ষেপ করা যায়, কঠিন কঠিন সমস্যা অতি সহজেই অল্পসময় শিক্ষার্থীদের মুখস্থ করিয়ে শেখানো যায়। তবে প্রকৃত গণিত শিক্ষার ক্ষেত্রে এই পদ্ধতি কার্য্যকরী হয় না। কেননা শিক্ষার্থীরা মুখস্থ সূত্র, নিয়ম প্রভৃতি অনভ্যাসের ফলে সহজেই ভুলে যায়। এই পদ্ধতির প্রয়োগে শিক্ষার্থীদের যুক্তি ও বিচার শক্তির বিকাশ লাভ করে না।

যে সমস্ত বিদ্যালয় শিক্ষাদানের মাধ্যমে কঠোর নিয়ম শৃঙ্খলা রক্ষা করার নীতি গ্রহণ করেছে তাদের ক্ষেত্রে এই পদ্ধতি তুলনামূলকভাবে কার্য্যকরী ও ফলপ্রদ।

গণিত শিক্ষণের মূলকথা:

বিদ্যালয়ে গণিত শিক্ষার ক্ষেত্রে বিভিন্ন শিক্ষাপদ্ধতি আলোচিত হ'লেও

আমাদের মনে রাখতে হবে গণিত শিক্ষার মূলকথাই হ'ল—আবিষ্কারের দৃষ্টিভঙ্গী গড়ে তোলা। গণিত শিক্ষার মাধ্যমে শিক্ষার্থীদের এমনভাবে পরিচালিত করতে হবে যেন তারা স্বাধীনভাবে চিন্তা করতে শেখে। স্বাধীন চিন্তার মাধ্যমে গাণিতিক সমস্যা সমাধানের সূত্র শিক্ষার্থীরা নিজে নিজেই আবিষ্কার করবে, যদিও আলোচনার মাধ্যমে তাদের ইঙ্গিতও দিতে হবে যাতে তারা গাণিতিক সূত্রগুলি যথাযথ প্রয়োগ করতে পারে। তাই গণিত শিক্ষার বৈশিষ্ট্যগুলি হ'ল (১) আবিষ্কারের উদ্দীপনা সঞ্চার (২) আলোচনার মাধ্যমে গাণিতিক সূত্রের অবতারণা এবং (৩) গাণিতিক সূত্রের যথাযথ প্রয়োগ।

গণিত শিক্ষণের প্রধান কথাই হ'ল আবিষ্কারের দৃষ্টিভঙ্গী গড়ে তোলা

প্রশ্নাবলী

1. "The analytic method is the method of the mathematical worker, the synthetic method is that in which he usually presents his results". Discuss with suitable illustrations from mathematics. [C. U. B. T. '67]

2. Distinguish between the Inductive method and the Deductive method and indicate how you would keep these contrasted methods in view in a mathematics class. [C. U. B. T. '68]

3. Illustrate with examples the synthetic and the analytic, the inductive and the deductive methods as applied to the teaching of mathematics, and point out the special value of each as a scientific approach to the subject. [C. U. B, T. '69 ; B. U. B. T. '68]

4, Discuss the principles of teaching mathematics in Secondary Schools, bringing out clearly the importance of deduction, induction and intuition. [C. U. B. T. '70]

5. Compare and contrast with illustrations the method of analysis with the method of synthesis as applied to the teaching of mathematics in the higher classes of a secondary school. In this connection discuss the role of heuristic method in the class-room. [C. U. B. Ed. '71, '72]

6. "Induction aided by intuition and experiment must form the initial phase in the teaching of mathematics in Secondary Schools".—Elucidate. [C. U. B. Ed. '72]

7. "Deduction is a process peculiarly appropriate to a final statement of mathematical results, but for the exploration of new fields induction, aided by intuition and experiment, would be best suited"—Elucidate.

[C. U. B. Ed. '73]

8. Describe the Heuristic method of teaching mathematics. How would you apply it in your class-room while teaching any topic of Geometry ? [C. U. B. Ed. '73]

9. Write notes on :

(*a*) Laboratory method in the teaching of Geometry. [C. U. B. T. '58]

(*b*) Assignment and record of pupil's work. [C. U. B. T. '54]

(*c*) Historical, Dogmatic and Lecture methods in the teaching of Mathematics in Secondary Schools.

10. It has been observed that though mathematics is a deductive science ; its basis is not deduction. Discuss how intuition, observation and induction play an important role in the teaching and learning of Mathematics.

[B. U. B. T. '67, 69]

॥ চতুর্থ অধ্যায় ॥

বিদ্যালয় পাঠক্রমে গণিত
(Mathematics in School Curriculum)

শিক্ষা-ব্যবস্থায় গণিতের স্থান ঃ (Place of Mathematics in Education system) শিক্ষা এক ব্যাপক প্রক্রিয়া। শিক্ষার লক্ষ্যও তাই বিভিন্ন। প্রতিটি বিষয় পাঠের উদ্দেশ্যও বিভিন্ন। তবে একথা বলা যায় যে, শিক্ষার বিভিন্ন লক্ষ্যে পৌছাবার জন্য বিভিন্ন বিষয়গুলি কোনও না কোন উপায়ে চেষ্টা করে। শিক্ষার লক্ষ্য হ'ল ব্যক্তিকে এমনভাবে গ'ড়ে তোলা যার মাধ্যমে তার সম্ভাবনার নিয়ন্ত্রণ ও বিকাশ ঘটবে এমনভাবে, যাতে একটা সুসংহত ব্যক্তিত্ব ও সন্তোষজনক জীবন দর্শনের উদ্ভব ঘটে এবং সার্থক সমাজজীবন যাপনের পরিপূর্ণ যোগ্যতা সৃষ্টিলাভ করে।

শিক্ষার লক্ষ্য রূপায়নে গণিতের দান

শিক্ষার অন্যতম উদ্দেশ্য হিসেবে দেশ, জাতি ও বিশ্বমানবের সর্বাঙ্গীন ঐতিহ্যের সঙ্গে শিশুকে পরিচিত করতে **গণিতের কৃষ্টিমূলক শিক্ষার মূল্য** অনস্বীকার্য। দেশের অগ্রগতি বিজ্ঞান ও প্রযুক্তিবিদ্যার অগ্রগতির ওপর নির্ভরশীল। অবার বিজ্ঞান ও প্রযুক্তি-বিদ্যার ভিত্তিমূলই হ'ল গণিত।

কৃষ্টি ও গণিত

পরিবেশের সঙ্গে সামঞ্জস্য বিধান করতে শেখানোই যদি শিক্ষার উদ্দেশ্যরূপে গ্রহণ করা হয় তাহ'লে গণিতভিত্তিক পরিবেশকে ভাল করে জানাতে হবে। মানবসভ্যতার ক্রমবিকাশ থেকে আমরা জানতে পারি মানুষ কিভাবে ধাপে ধাপে প্রকৃতির সঙ্গে সংগতি-বিধান করে বর্তমানে সুসভ্য মানুষে পরিণত হয়েছে। মানুষের এই **সংগতি-বিধানে গণিতের দানও** অনস্বীকার্য। তাছাড়া মানুষ তার ব্যক্তিগত জীবনে পরিবেশের বিভিন্নদিক যেমন, ব্যবসা-বাণিজ্য, উৎপাদন, পুর্ত্ত, কৃষি, রেলপথ ও গৃহনির্মাণ, নৌচালনা, জরীপের কাজ প্রভৃতি কোন না কোন কাজে অংশ গ্রহণ করছে। এই সমস্ত কাজেই গণিতের ব্যবহার উত্তরোত্তর বেড়েই চলেছে।

পরিবেশ ও গণিত

আদর্শ নাগরিকত্ব যদি শিক্ষার লক্ষ্য হিসাবে ধরা যায় তাহলে একথা বলতেই হবে যে, নাগরিক জীবন, নাগরিক সংস্থা, নাগরিক অধিকার ও দায়িত্বের ক্রমবিবর্তন প্রভৃতির সঙ্গে শিক্ষার্থীদের অন্তরঙ্গরূপে পরিচয় করিয়ে দেবার ক্ষমতাও গণিতের আছে। গণিতই ব্যক্তির বুদ্ধি, যুক্তি ও বিচার ক্ষমতা বাড়িয়ে তোলে যা সু-নাগরিকতার অবিচ্ছেদ্য অঙ্গ।

সুনাগরিকতা ও গণিত

সামাজিক দক্ষতাসম্পন্ন সমাজবাদী মানুষ গড়াই যদি শিক্ষার লক্ষ্য হয় তাহলে সমাজের বর্তমান প্রবাহের সঙ্গে সুসামঞ্জস্যবিধান করে গণতান্ত্রিক **সামাজিক জীব হিসাবে গড়ে তোলার** ক্ষেত্রেও **গণিতের অবদান** অপরিসীম।

সামাজিকতা ও গণিত

সু-চরিত্র ও সু-অভ্যাস গঠনের ক্ষেত্রেও গণিত ব্যক্তির ব্যক্তিত্বের বিকাশের সহায়ক।

ব্যক্তিত্ব বিকাশ ও গণিত

সুতরাং শিক্ষার মৌল উদ্দেশ্যপূরণের সহায়ক হিসাবে বিদ্যালয় পাঠক্রমে গণিতের অন্তর্ভুক্তি সর্বপ্রকার বিতর্ক ও প্রশ্নের উর্ধ্বে।

আমরা পূর্বেই আলোচনা ক'রেছি যে, গণিত শিক্ষণের **মূল উদ্দেশ্য তিনটি**ঃ (১) **ব্যবহারিক** উদ্দেশ্য, (২) **কৃষ্টিমূলক** উদ্দেশ্য ও (৩) **শৃঙ্খলামূলক** উদ্দেশ্য। তাছাড়া আরও দেখেছি যে শিক্ষার্থীর মানসিক বিকাশের স্তর অনুযায়ী এক একটি স্তরে গণিত শিক্ষণের উদ্দেশ্য ও বিষয়বস্তুর নির্ধারণ হওয়া উচিত।

গণিতশিক্ষার মূল উদ্দেশ্য

UNESCO-র সহযোগিতায় International Bureau of Education বিদ্যালয় স্তরে **গণিত শিক্ষার চারটি মূল উদ্দেশ্য** স্থির করেছেন ঃ—(১) **শিক্ষামূলক উদ্দেশ্য** (২) **সাধারণ শিক্ষামূলক উদ্দেশ্য** (৩) **ব্যবহারিক উদ্দেশ্য** এবং (৪) **ভবিষ্যৎ শিক্ষার প্রস্তুতির উদ্দেশ্য**।

International Bureau of Education-এ গণিত শিক্ষার লক্ষ্য

গণিত এমন একটি বিষয় যার চর্চা করতে গেলেই কতকগুলি **মানসিক ক্ষমতা** স্বতঃপ্রবৃত্ত হয়ে নিয়োগ করতে হয়। এগুলি হ'ল মনোযোগ, পর্যবেক্ষণ, নির্ভুলতা ও ধৈর্য্য। তাছাড়া গণিত শিক্ষায় শ্রমস্পৃহার অনুশীলন হয়, মানসিক শৃঙ্খলা ও নৈর্ব্যক্তিক দৃষ্টিভঙ্গী গড়ে ওঠে। এছাড়া গণিত শিক্ষার মধ্য দিয়ে কতকগুলি বিশেষ মানসিক ক্ষমতার অনুশীলন হয় যেমন, বিমূর্ত চিন্তা করা, চিন্তা ও ভাবপ্রকাশে যথাযথ শব্দের ব্যবহার করা, বিশ্লেষণী ও আবিষ্কারের মনোভাব গঠন করা। এককথায়

মানসিক ক্ষমতা ও গণিত

বলতে গেলে যে সকল নৈতিক ও মানসিক শক্তি ব্যক্তিত্বের বিকাশে সহায়ক, গণিত শিক্ষার মাধ্যমে সেগুলির অনুশীলন ও বিকাশ সাধন হয়। সুতরাং শিক্ষা-মূলক উদ্দেশ্যের পরিপ্রেক্ষিতেও গণিত শিক্ষা একান্ত প্রয়োজন।

সাধারণ শিক্ষা বলতে **সামাজিক ও নাগরিকতার** শিক্ষাকেই বোঝায়।

সামাজিক ও নাগরিক শিক্ষায় গণিত

সাধারণ শিক্ষায় ব্যক্তিকে যেমন উৎপাদনশীল নাগরিক করার পরিকল্পনা করা হয় অন্যদিকে তেমনি দায়িত্বশীল নাগরিক হিসাবে কৃষ্টি ও সামাজিক সঙ্গতি রক্ষা করার উদ্দেশ্যও নিহিত থাকে। এটি ব্যবহারিক ও কৃষ্টিমূলক উদ্দেশ্যের সমন্বয়।

ব্যবহারিক শিক্ষা ও গণিত

কেবলমাত্র ব্যবহারিক শিক্ষা হ'ল **বৃত্তিগত দক্ষতা ও দৈনন্দিন জীবনের বিভিন্ন সমস্যা সমাধানের** শিক্ষা। এক্ষেত্রেও গণিতের ব্যবহার অপরিহার্য্য।

উচ্চশিক্ষা ও গণিত

উচ্চস্তরে বিজ্ঞান বা প্রযুক্তিবিদ্যার ক্ষেত্রে শিক্ষার্থীদের যোগ্য ক'রে তোলার ক্ষেত্রে **গণিত শিক্ষণ** অবশ্য-কর্তব্য।

যুক্তিপূর্ণ অনুসিদ্ধান্ত ও চরম সিদ্ধান্ত গ্রহণ করার ক্ষমতা অর্জন গণিতের মাধ্যমেই সম্ভব, কারণ **গণিতের প্রধান বৈশিষ্ট্যই** হ'ল (১) **নিশ্চয়তা** (২) **সরলতা** ও (৩) **প্রযোজ্যতা**।

গণিতের বৈশিষ্ট্য

শিক্ষার সঞ্চারণ (Transfer of training) সম্পর্কে এখনও অনেকে সন্দেহ প্রকাশ ক'রে থাকেন। গণিতের যুক্তিচর্চা যে অন্যান্য বিষয়ের যুক্তিতে সাহায্য করে সে বিশ্বাসের বশবর্তী হয়েই গণিতকে বিদ্যালয়স্তরে অবশ্যপাঠ্য হিসাবে পাঠ্যসূচীর অন্তর্ভুক্ত করা একান্ত প্রয়োজন বলে ধরে নেওয়া হ'ত। নানারকম পরীক্ষার ফলে অনেকে এই মত প্রকাশ করেন যে, এক বিষয়ে শিক্ষা অন্য বিষয়ে প্রভাব বিস্তার করে সত্য, কিন্তু সে প্রভাব যে খুবই বেশী বা সব সময়ই বিস্তারিত হয়, তা নয়। আবার সম্প্রতি পরীক্ষার ফলে অনেকে এই সিদ্ধান্তেও এসেছেন যে, শিক্ষা অর্থহীন হ'লে সঞ্চারণ বেশী হয় না তা সত্য, কিন্তু **অর্থপূর্ণ শিক্ষার সঞ্চারণের সম্ভাবনা যথেষ্ট থাকে।** সুতরাং পর্যবেক্ষণ, বিশ্লেষণ, তুলনা, কার্যকারণ সম্বন্ধ নির্ণয়, সমন্বয় সাধন প্রভৃতি নানাবিধ মানসিক ক্রিয়াগুলির মাধ্যমে গণিত শিক্ষা দিলে অর্থাৎ অর্থ বুঝিয়ে গণিত শিক্ষা দিলে গণিত-চর্চা, অন্য বিষয় শিক্ষায় বা সমস্যা সমাধানে সাহায্য করবেই।

শিক্ষাসঞ্চারণ ও গণিত

সভ্যতার অগ্রগতি ও গণিত

সভ্যতার অগ্রগতিকে ত্বরান্বিত করতে, ব্যক্তির মানসিক শক্তিকে সম্পূর্ণ বিকশিত করতে, প্রাত্যহিক জীবন-ধারণের উদ্দেশ্যে ভবিষ্যৎ শিক্ষার প্রস্তুতির উদ্দেশ্যে এবং শিক্ষায় সঞ্চারণকে সহায়তা করতে বিদ্যালয়স্তরে গণিত শিক্ষণ আবশ্যিক হওয়া উচিত।

বিদ্যালয় পাঠক্রমে গণিতের স্থান দ্বিতীয়

পাঠক্রমে মাতৃভাষার স্থান প্রথম ও প্রধান—এটা সর্বজন স্বীকৃত। মাতৃভাষার পরেই পাঠক্রমে গণিতের স্থান হওয়া উচিত। অন্যান্য বিষয়ের জ্ঞান না থাকলেও ব্যবহারিক জীবনের কাজ-কর্ম চলতে পারে। কিন্তু গণিতকে বাদ দিয়ে আমাদের একমুহূর্তও চলে না। তাই Young-এর ভাষায় বলতে হয়ঃ 'Wherever we turn in these days of iron, steam and electricity we find that mathematics has been the pioneer. Were its backbone removed our material civilisation would inevitably collapse." তাই **পাঠক্রমে গণিতের স্থান হবে দ্বিতীয়**। অনেকের মতে গণিতে বুৎপত্তিলাভ করা সকল শিক্ষার্থীর পক্ষে সম্ভব নয়। গণিতে পারদর্শিতার মূলে আছে জন্মগত বিশেষ ক্ষমতা বা প্রবণতা যা সকলের থাকে না। কিন্তু অধ্যাপক Spearman তাঁর **দ্বি-উপাদানতত্ত্বে** দেখিয়েছেন যে বুদ্ধি বা সচেতন মানসিক ক্রিয়া দুটী উপাদানের সমষ্টি। একটি 'g' অর্থাৎ সাধারণ উৎপাদক বা শক্তি, যা একজন ব্যক্তির একটি আচরণে, কার্য সম্পাদনে অভিব্যক্ত হয়, আর পরিমাণের দিক থেকে ঐ ব্যক্তির ক্ষেত্রে 'g' বা সাধারণ শক্তি অপরিবর্তনশীল বা ধ্রুবক। কিন্তু বিভিন্ন ব্যক্তির মধ্যে 'g' এর পরিমাণগত তারতম্য রয়েছে। অপরটি হ'ল 's' বা বিশেষ উৎপাদক বা একটি বিশেষ ধরনের শক্তি যা একটি বিশেষ কাজের ক্ষেত্রে ক্রিয়াশীল হয়। 's' সম্পর্কে ব্যক্তিতে ব্যক্তিতে পার্থক্য তো রয়েছেই; আবার একই ব্যক্তির বিভিন্ন আচরণ, কার্য্য সম্পাদনের ক্ষেত্রে 's' এর বিভিন্নতাও রয়েছে, তিনি দেখিয়েছেন যে সমস্ত বিষয় শিক্ষার ওপর 'g' উৎপাদকের তুলনায় 's' উৎপাদকের প্রভাব বেশী, সেগুলি জন্মগত বিশেষ ক্ষমতার ওপর নির্ভরশীল। সেগুলিতে বুৎপত্তিলাভ করা সকলের পক্ষে সম্ভব নয়। অভীক্ষার দ্বারা দেখা গেছে যে, **গণিত শিক্ষায় g-উৎপাদকের প্রভাবই বেশী গণিতে দক্ষতা জন্মগত কোন বিশেষ**

দ্বি-উপাদান তত্ত্ব ও গণিত (Two factor Theory and Mathematics)

প্রবণতা বা ক্ষমতার ওপর নির্ভরশীল নয়। উপযুক্ত শিক্ষা পদ্ধতি অবলম্বন করলে সাধারন বুদ্ধিসম্পন্ন **সমস্ত শিক্ষার্থীই গণিতে কৃতিত্ব** দেখাতে পারে। সুতরাং বিদ্যালয়-স্তরে গণিতের অন্তভুক্তি ও আবশ্যিকতার ক্ষেত্রে উপযুক্ত শিক্ষা পদ্ধতি যেমন অনুসরণ করা প্রয়োজন তেমনি গণিতের পাঠক্রমও নিয়ন্ত্রণ করা অবশ্যই কর্তব্য।

উপযুক্ত পদ্ধতি ও গণিত

গণিত পাঠক্রম ঃ (Mathematics Curriculum) **গণিত পাঠক্রম গণিত শিক্ষণের উদ্দেশ্যগুলির দ্বারা নিয়ন্ত্রিত হয়।** গণিত শিক্ষণের উদ্দেশ্য হিসেবে আমরা প্রধানতঃ ব্যবহারিক, কৃষ্টিমূলক এবং শৃঙ্খলামূলক উদ্দেশ্যকেই গ্রহণ করেছি। **কোঠারী কমিশন** (১৯৬৪-৬৬) অবশ্য গণিতের **জ্ঞানমূলক ব্যবহারের** দিকেই বেশী গুরুত্ব আরোপ করেছেন। এ সম্পর্কে আমরা পূর্ববর্তী অধ্যায়ে আলোচনা করেছি যে, Mathematics is primarily taught on account of the mental training it affords and the knowledge of facts it imparts."

কাজেই **প্রয়োজনীয় তথ্যের জ্ঞান আহরণ ও মানসিক শিক্ষা—** দুটিকেই গণিত পাঠক্রমে **সমান মূল্য** দিতে হবে। এইজন্যই পাঠক্রমে গণিতের সমস্যাগুলি হবে **বাস্তবানুগ ও জীবন ধর্মী**। শিক্ষকের কাজ হবে—মানসিক শিক্ষা ও প্রয়োজনীয় তথ্যের জ্ঞানের সমন্বয়ে **অনুবন্ধ প্রণালীর** মাধ্যমে শিক্ষার্থীদের শিক্ষিত করা।

জ্ঞান আহরণ ও মানসিক শিক্ষার মূল্য

শুধুমাত্র জ্ঞান আহরণই শিক্ষার উদ্দেশ্য নয়। **বাস্তব জীবনে প্রয়োগ** করতে না পারলে জ্ঞানার্জনের কোন সার্থকতা নেই। আবার জ্ঞানকে প্রয়োগ করতে হ'লে চাই মানসিক শিক্ষা। তার জন্য প্রয়োজন **দৃষ্টিভঙ্গী, মনোভাব ও অভ্যাস গঠনের**। বাস্তব প্রয়োগের মাধ্যমে যেমন মানসিক শিক্ষার উৎকর্ষ ঘটে তেমনি মানসিক শিক্ষার উৎকর্ষের ফলে জ্ঞান হয় বাস্তব ও প্রয়োগধর্মী। তাই পাঠক্রম রচনাকালে গণিত শিক্ষণের প্রধান লক্ষ্যদুটির উপর সমান গুরুত্ব দিতে হবে। গণিত পাঠক্রমে এমন বিষয়বস্তু অন্তর্ভুক্তি করতে হবে যেগুলি হবে **জীবন ও পরিবেশ ভিত্তিক, শিক্ষার্থীর আগ্রহ সঞ্চারক ও মানসিক শক্তির উৎকর্ষের সহায়ক।**

বাস্তবানুগ, জীবনধর্মী পরিবেশভিত্তিক, আগ্রহ সঞ্চারক ও মানসিক শক্তির উৎকর্ষের সহায়ক পাঠক্রম

গণিতে পাঠক্রম নির্ধারণের নীতিঃ (Principles of Curriculum Construction in Mathematics)

গণিতের পাঠক্রমে **বিষয়বস্তু নির্বাচন** সম্পর্কে Prof. Young নিম্নের **পাঁচটী নীতি** অনুসরণ করার নির্দেশ দিয়েছেন।

Young-এর পাঁচটা গণিত পাঠক্রম নির্ধারণ নীতি

(১) গাণিতিক **চিন্তাধারার সুস্পষ্ট ও সুবিধাজনক উপস্থাপন** করা।

(২) **প্রাকৃতিক নিয়মাবলীর উত্তম ব্যাখ্যার** সহায়তা করা।

(৩) **সামাজিক জীবন ও আধুনিক জীবনের কর্মধারার সঙ্গে গণিতের সম্পর্ক** নির্ণয়ের সহায়তা করা এবং তাদের সমস্যার সমাধানে গণিতের অবদান দেখানো।

(৪) শিক্ষার্থীর **ভবিষ্যৎ জীবনের প্রয়োজনে গাণিতিক দক্ষতার প্রয়োগ** করতে শেখানো।

(৫) বিজ্ঞানসম্মত শিক্ষাতত্ত্বের **চাহিদা অনুযায়ী বিষয়টীর সুসংগঠন**।

গণিতের পাঠক্রমের স্বরূপঃ (Nature of Mathematics Curriculum)

পাঠক্রম হবে **শিশুকেন্দ্রিক**। শিশুর রুচি, ক্ষমতা, প্রবণতা, আগ্রহ ও প্রেষণার ভিত্তিতে পাঠক্রম নির্ধারণ করতে হবে। শিশুর মনের স্বরূপ ও মানসিক পরিণমন (maturity)ও আমাদের জানতে হবে। এইভাবে শিশুকে কেন্দ্র ক'রে তার চাহিদা, আগ্রহ, রুচি, ক্ষমতা ও পরিণমনের পরিপ্রেক্ষিতে পাঠক্রম সংগঠন করলে শিক্ষার্থীর শিক্ষায় আসবে প্রেষণা ও উৎসাহ, যা গণিত শিক্ষণের ক্ষেত্রে অপরিহার্য নীতি।

শিশুকেন্দ্রিক পাঠক্রম

গণিত পাঠক্রম সাজানোর পদ্ধতিঃ (Grading of Mathematics Curriculum)

পাঠক্রম সাজানোর পদ্ধতি

গণিতের **পাঠক্রম সাজানোর সময়** আমাদের ভাবতে হবে **শিক্ষার্থীর স্বরূপ ও সমাজের চাহিদার কথা**। সেদিক থেকে পদ্ধতি হিসেবে রয়েছেঃ

(ক) **মনোবৈজ্ঞানিক পদ্ধতি** (Psychological method)ঃ পাঠক্রম হবে মনোবিজ্ঞানভিত্তিক অর্থাৎ বিষয়বস্তু এমনভাবে সাজাতে হবে যাতে শিক্ষার্থীর

মধ্যে **আগ্রহ ও প্রেষণা উদ্দীপিত** হয়। বিষয়বস্তু যেন শিক্ষার্থীর রুচি, আগ্রহ, প্রবণতা, ক্ষমতা প্রভৃতি অনুযায়ী বিন্যস্ত হয়। এইভাবে সাজালে গণিত হবে এক অর্থপূর্ণ বিষয় এবং শিক্ষা-সঞ্চারণের হবে সহায়ক।

মনোবৈজ্ঞানিক পদ্ধতি

(খ) **যুক্তিভিত্তিক পদ্ধতি** (Logical method) : এখানে শিক্ষার্থী অপেক্ষা **যুক্তিসম্মত জ্ঞানের** ওপরই বেশী জোর দেওয়া হয়। এ ব্যাপারে শিক্ষকের কোন স্বাধীনতা থাকে না। তবে পাঠক্রমে বিভিন্ন স্তরের মধ্যে একটা যুক্তিপূর্ণ সংহতির সৃষ্টি করা এই পদ্ধতির অন্যতম বৈশিষ্ট্য। তবে পাঠক্রম সাজানোর সময় মনোবিজ্ঞানসম্মত ও যুক্তিসম্মত দুটি পদ্ধতির সমন্বয়কেই প্রাধান্য দিতে হবে। প্রথমটির মাধ্যমে শিক্ষার্থীর মধ্যে আগ্রহ এবং দ্বিতীয়টির দ্বারা বিষয়বস্তুর বিভিন্ন অংশের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপনের স্পৃহা জন্মায়।

যুক্তিসম্মত পদ্ধতি

(গ) **বিষয়বস্তুমূলক পদ্ধতি** (Topical method) : এই পদ্ধতির মাধ্যমে একটি বিষয়ের সম্পূর্ণ জ্ঞান অর্জন না হওয়া পর্যন্ত অন্য কোন বিষয়ের অন্তর্ভুক্তি চলে না। **বিষয়বস্তুর কাঠিন্য নির্ভর করে শিক্ষার্থীর মানসিক বয়সের ওপর**। শিক্ষা সম্পূর্ণ ও নিখুঁত করার ব্যাপারে শিক্ষকের আগ্রহ থাকলেও শিক্ষার্থীর মানসিক বয়স শিক্ষনের উপযোগী না হওয়ায় শিক্ষা ফলপ্রদ হয় না।

বিষয়বস্তুমূলক পদ্ধতি

(ঘ) **এককেন্দ্রিক পদ্ধতি** (Spiral or Concentric method) : একই বিষয়বস্তুকে **কাঠিন্যের পরিপ্রেক্ষিতে বিভক্ত করে** সাজানোর নাম হ'ল এককেন্দ্রিক পদ্ধতি। এই পদ্ধতিটি স্বাভাবিক ও মনোবিজ্ঞান-সম্মত। এর মাধ্যমে প্রতি স্তরেই পাঠটির অনুশীলন হয় কাঠিন্যের মূল্যানুসারে।

এককেন্দ্রিক পদ্ধতি

(ঙ) **সক্রিয়তার পদ্ধতি** (Principle of Activity) : **শিক্ষার্থীর ধর্মই হ'ল সক্রিয়তা**। এর মাধ্যমে শিক্ষাদান শিশুর পক্ষে বিশেষ উপযোগী। হাতে কলমে শিক্ষা কাজের মাধ্যমে শিক্ষা, শিক্ষার মূর্তীকরণ এর প্রধান লক্ষ্য। **সক্রিয়তাতত্ত্ব নীতির পরিপ্রেক্ষিতে এই পদ্ধতি গঠিত**। মূর্ত থেকে বিমূর্ত ধারণার দিকে যাওয়াই এই পদ্ধতির মূলতত্ত্ব। তাই বলা হয় "The Curriculum for young

সক্রিয়তার পদ্ধতি

people must be thought in terms of activity and experience, not, as hitherto, in terms of passive assimilation by the pupil of material set before him by the teacher" এই পদ্ধতিতে পাঠক্রম সাজানোর সময় ব্যক্তিগত ও গৃহভিত্তিক কার্যাবলী, আনন্দপূর্ণ কার্যাবলী, বৃত্তিভিত্তিক কার্যাবলী, সমাজভিত্তিক এবং জাতীয় কার্যাবলীর কথা চিন্তা করে বিষয়বস্তু নির্বাচিত করতে হবে।

(চ) **উপযোগিতামূলক পদ্ধতি** (Principle of Utility) ঃ

উপযোগিতামূলক পদ্ধতি

সুনাগরিকতার শিক্ষা দেওয়ার উদ্দেশ্যে দৈনন্দিন জীবন যাত্রার **উপযোগী, বৃত্তিভিত্তিক এবং সভ্যতার অগ্রগতির সহায়ক বিষয়বস্তু নির্বাচন করার পদ্ধতিই হল এর মূল লক্ষ্য।**

(ছ) **অনুবন্ধ-মূলক পদ্ধতি** (Principle of Correlation) ঃ শিক্ষার ক্ষেত্রে **অনুবন্ধ নীতি** আজ সর্ব্বজন-স্বীকৃত। একক ভাবে কোন বিষয়ই বর্তমানে শিক্ষা দেওয়া হয় না। প্রতিটি বিষয়ই কোন-না-কোনো ভাবে অন্যান্য

অনুবন্ধ নীতি

বিষয়ের সঙ্গে সম্পর্কযুক্ত। গণিতের ক্ষেত্রে বিষয়বস্তুকেও অনুবন্ধ নীতির পরিপ্রেক্ষিতে সাজাতে হবে। গণিতে অনুবন্ধ নীতির ক্ষেত্রে নিম্নের পদ্ধতিগুলি অবলম্বন করা উচিত ঃ

(১) প্রাত্যহিক জীবনের সমস্যার সঙ্গে অনুবন্ধ।

(২) পাঠক্রমের অন্যান্য বিষয়ের সঙ্গে অনুবন্ধ।

(৩) গণিতের বিভিন্ন শাখার সঙ্গে অনুবন্ধ।

(৪) গণিতের একই শাখার বিভিন্ন বিষয়ের অনুবন্ধ।

গণিতের বিষয়বস্তু সংগঠনের সাধারণ নীতি ছাড়াও কতকগুলি বিশেষ

বিশেষ নীতি

বিশেষ প্রয়োজনের দিকে নজর দেওয়া অবশ্য কর্তব্য। সেগুলি হল (ক) **শিক্ষক কর্তৃক বিষয়ের বিশেষীকরণ** (খ) **স্বজ্ঞা ও আরোহভিত্তিক** পাঠক্রম এবং জ্ঞাত থেকে অজ্ঞাত বা সাধারণ সত্য থেকে বিশেষ সত্যের দিকে যাওয়ার নীতি অনুসরণ; (গ) গণিতের ক্ষেত্রে **মূর্ত জিনিসের বা প্রতীকের ব্যবহার।**

বিভিন্ন স্তরে গণিত পাঠক্রম ঃ বিদ্যালয়ের শিক্ষাস্তর হিসেবে ১৯৭৪ সাল থেকে যেটী স্বীকার করা হয়েছে সেটী হ'ল **প্রাথমিক** (I-IV), **নিম্ন মাধ্যমিক** (V—VIII) ও **মাধ্যমিক** (IX—X)—প্রতিটি স্তরে গণিত

শিক্ষার উদ্দেশ্য আমরা আগেই আলোচনা করেছি। বিভিন্নস্তরের উদ্দেশ্যের পরিপ্রেক্ষিতে **বিভিন্ন স্তরের পাঠক্রম** আমাদের দেশে গ্রহণ করা হয়েছে :

প্রাথমিক স্তর

(১) **প্রাথমিক স্তর :** এই স্তরের পাঠক্রমে আছে গণনা, সংখ্যাজ্ঞান, প্রথম চারি নিয়ম, পাটীগণিতের প্রতীকের পরিচিতি, মেট্রিক পদ্ধতিতে ওজন, পরিমাণ, সময়, দৈর্ঘ্য ও ক্ষেত্রফলের এককের পরিচিতি, জ্যামিতিক ঘনকের বা আয়তঘনের পরিচিতি, আয়-ব্যয়ের এবং দশমিক ভগ্নাংশের চিহ্নের পরিচিতি।

নিম্ন-মাধ্যমিক স্তর

(২) **নিম্নমাধ্যমিক স্তর :** এই অধ্যায়ে রয়েছে, (ক) **পাটীগণিত**—কৃত্রিম ও.মৌলিক সংখ্যাজ্ঞান, গ,সা,গু ও ল, সা,গু, মেট্রিক পদ্ধতিতে দৈর্ঘ্য ও ওজনের পরিমাপ, ভারতীয় মুদ্রায় দশমিকীকরণ, সরল, জটিল ও ক্রমিক ভগ্নাংশ, বর্গমূল, ঐকিক নিয়ম, লাভ-ক্ষতি, শতকরা হিসাব, ভগ্নাংশ ও দশমিক ভগ্নাংশের ল, সা,গু/গ, সা, গু, সময়-কার্য, সরলসুদ গড় নির্ণয়, সময় দূরত্ব এবং আয়কর সংক্রান্ত সমস্যাবলী।

(খ) **বীজগণিত :** দিক নির্দেশক সংখ্যা ও তার ব্যবহার, চারি নিয়মের ব্যবহার, বিভিন্ন সূত্র ও তার প্রয়োগ, সূত্রের সাহায্যে উৎপাদক নির্ণয়, মধ্যপদ-বিশ্লিষ্টপূর্বক উৎপাদক, ল,সা,গু/গ,সা,গু, সরল ও সহসমীকরণ, লেখচিত্র ও তার সাহায্যে সমীকরণ ও সহসমীকরণের সমাধান।

(গ) **জ্যামিতি :** ব্যবহারিক বা পরীক্ষাভিত্তিক উপস্থাপন (VI&VII) এবং যুক্তিভিত্তিক উপস্থাপন (VIII)। সংজ্ঞা—বিন্দু, রেখা, তল, সমতল, ঘনপদার্থ, প্রতিফলন, প্রতিসাম্য, ঘূর্ণন ও প্রসারণ এবং তাদের প্রমাণ, বিভিন্ন জ্যামিতিক চিত্র অঙ্কন।

(৩) **মাধ্যমিক স্তর :** এই স্তরে অন্তর্ভুক্ত হয়েছে :—

(ক) **পাটীগণিত**—অনুপাত—সমানুপাত, শতকরা, সরলসুদ ও লাভ-ক্ষতি (বীজগাণিতিক সূত্রের সাহায্যে প্রমাণের চেষ্টা)

(খ) **বীজগণিত :**

মাধ্যমিক স্তর

পূর্ববর্তী পাঠ ছাড়াও সরল ও সহ-সমীকরণ, অসমীকরণ, দ্বিঘাত সমীকরণ, আংশিক সংখ্যা (Fractional number) এবং করনী, লেখচিত্র ও তার প্রয়োগ।

(গ) **জ্যামিতি** ঃ

ব্যবহারিক ও বিশ্লেষণী প্রমানের সমন্বয়। বিভিন্ন অংকন।

(ঘ) **পরিমিতি** ঃ

আয়তক্ষেত্র, বর্গক্ষেত্র-এর পরিসীমা ও ক্ষেত্রফল নির্ণয়, ত্রিভুজ-এর ক্ষেত্রফল নির্ণয়, আয়তঘন, চোঙ ও বৃত্তাকার ক্ষেত্রের তল ও ঘন নির্ণয়।

(ঙ) **ত্রিকোণমিতি** ঃ

ত্রিকোনমিতির কোনের ধারণা, সূক্ষ্মকোনবিশিষ্ট ত্রিকোনমিতির কোনানুপাত, পরিপূরক কোনের কোনানুপাত, উচ্চতা ও দূরত্ব বিশিষ্ট সহজ সমস্যার সমাধান।

(চ) **ঐচ্ছিক গণিত** ঃ—

যারা **গণিতশিক্ষার** প্রতি **বিশেষ আগ্রহী**, তাদের জন্য **উচ্চ পর্যায়ের** বীজগণিত, জ্যামিতি, ত্রিকোনমিতি, ঘনজ্যামিতি পাঠক্রমে অন্তর্ভুক্ত হবে। ঘন-জ্যামিতি ও পরিমিতির শিক্ষা হ'বে মূলতঃ **প্রয়োগ-ভিত্তিক ও ব্যবহারিক**।

(ছ) **বিছিন্নগণিত** (Discrete Mathematics)

এটিও থাকছে **ঐচ্ছিক গণিত** হিসাবে। এটা New Mathematics-এর নীতির ওপর ভিত্তি করে গঠিত। এখানে আছে Sets of Proposition, Boolean-Algebra, Symbolic Logic, এবং Computors Arithmetic. [এর আলোচনা পরবর্তী অধ্যায়ে বিশদভাবে আলোচিত করা হল।]

উপরোক্ত বিষয়বস্তু অনুযায়ী বর্তমান বিষ্যালয়ের গণিভ পাঠক্রমকে সংগঠিত করা হয়েছে এবং লক্ষ্যটা রয়েছে ব্যবহারিক, প্রয়োগ-ভিত্তিক এবং সমাজের চাহিদাভিত্তিক।

১৯৭৪ সালের আগে যে **গণিত পাঠক্রম** চালু ছিল তার উদ্দেশ্য মূলত **ব্যবহারিক ছিল** ব'লে স্বীকৃত। পূর্বে গণিতের পাঠক্রমের বিষয়বস্তু নির্ধারণ সম্পর্কে বলা হয়েছিল—"The Course in Core mathematics in our Secondary Schools is oriented to the use of mathematics in daily life."

পূর্বের গণিত পাঠক্রম

পূর্ব্বের সমগ্র পাঠক্রমটা লক্ষ্য করলে দেখা যায় এটা **কতকগুলি ভাগে বিভক্ত** ;—যেমন ঃ পাটীগণিত, বীজগণিত, জ্যামিতি ও পরিমিতি এবং প্রাথমিক পরিসংখ্যান। এক্ষেত্রে **পাটীগণিতের** মধ্যে যে সমস্ত বিষয় অন্তর্ভুক্ত করা

হয়েছে সেগুলির **ব্যবহারিক মূল্যই বেশী,** কিন্তু **বীজগণিতের প্রয়োজনীয়তা তত ব্যাপক নয়।** সমস্যাভিত্তিক বীজগণিত পাঠক্রমের বদলে **গতানুগতিক পদ্ধতিই অবলম্বন** করা হচ্ছিল। **জ্যামিতির** ক্ষেত্রেও **গতানুগতিকতা** ছিল তবে **পরিমিতির** অন্তর্ভুক্তির জন্য এর **ব্যবহারিক** দিকটা কিছু লক্ষনীয়। আধুনিক জগতে সব ব্যাপারেই **পরিসংখ্যান** ব্যবহৃত হচ্ছে। সুতরাং পূর্ব্বের পাঠক্রমে এর **অন্তর্ভুক্তি প্রশংসনীয়।**

গণিত পাঠক্রম রচয়িতারা **দৈনন্দিন জীবনে গণিতের ব্যবহারিক প্রয়োগের কথা ভেবেই পাঠক্রম রচনা করেছিলেন।** কিন্তু কার্যতঃ এটা ব্যর্থ, তার প্রমাণ পরীক্ষায় গণিতের অসাফল্য। এর **ব্যর্থতার পেছনে রয়েছে ঃ**

গণিতের ব্যর্থতার কারণ

(১) পাঠক্রম নির্ধারণের **মূলনীতি অনুসৃত হয়নি।**

(২) **অনুবন্ধ নীতি প্রয়োগের অভাব ;**

(৩) **বিষয়বস্তুর ভার** বেশী হওয়ায় শিক্ষার্থীর কাছে বিষয়টি ভীতিপ্রদ হয়েছে ;

(৪) পাঠক্রম **শিশুকেন্দ্রিক হয়নি ;**

(৫) পাঠক্রম রচনায় **শিক্ষকের মতামতকে গ্রহণ করা হয়নি।**

কোঠারি কমিশনের মতামত ঃ কোঠারি কমিশন গণিতের বিভাগ ও উপরিভাগের সমালোচনা করে বলেছেন, গণিত হবে অখণ্ড বিষয়। প্রথম শ্রেণী থেকে সপ্তম শ্রেণী পর্যন্ত **গণিত পাঠক্রমে** থাকবে সংখ্যা সম্পর্কে ধারণা, চিহ্নের ব্যবহার সমীকরণ, লেখচিত্র: ও অপেক্ষক (function) সম্পর্কে ধারণা, জ্যামিতিকে আরো যুক্তিভিত্তিক করতে হবে। **মাধ্যমিক স্তরে ও উচ্চমাধ্যমিক স্তরের পাঠক্রমের পুনর্বিন্যাস করতে হবে। অপ্রয়োজনীয় অংশ বাদ দিতে হবে। ত্রিকোণমিতি ও বীজগণিত একসঙ্গে পড়তে হবে। জ্যামিতি শিক্ষা হবে আধুনিক পদ্ধতিতে।** এর জন্য School Mathematics Study Group series—Yale uni Press 1960-তে যে সমস্ত প্রতীক, চিহ্ন, ভাষা ব্যবহার করা হয়েছে, সেগুলির ব্যবহার করা বাঞ্ছনীয়। শিক্ষার্থীর বয়স, বুদ্ধি ও ক্ষমতা অনুযায়ী শিক্ষণ পদ্ধতির পরিবর্তন করতে হবে।

কোঠারি কমিশন ও গণিত পাঠক্রম

গণিতের স্থান সম্পর্কে **কমিশনের বক্তব্য** হ'ল গণিত থাকবে বিজ্ঞান,

শিক্ষা ও গবেষণার কেন্দ্রস্থলে। বিদ্যালয়ের শিক্ষকদের গণিত সম্পর্কে আগ্রহী করার জন্য তাঁদের অন্তর্নিহিত সম্ভাবনার বিকাশের জন্য এবং তাঁদের গণিতে অধিকতর দক্ষতা অর্জনের জন্য কমিশন Programmed learing বা **পরিকল্পিত নির্দেশনা বা শিক্ষার** কথাও বলেছেন। এছাড়া বিদ্যালয়ে **আবাসিক গণিত গবেষণা কেন্দ্র প্রতিষ্ঠা** করার সুপারিশ করেছেন। গণিতের মাধ্যমে শিক্ষার্থীর প্রতিভা বা মেধার সন্ধানে সময় কম লাগে বলে কমিশন গণিতকে এত বেশী গুরুত্ব দিয়েছেন। **গণিতে বিশেষ মেধা-সম্পন্ন শিক্ষার্থীদের জন্য একটি কি দুটি বিশেষ মাধ্যমিক বিদ্যালয় স্থাপনেরও** সুপারিশ করেছেন।

গণিতের স্থান ও কমিশন

প্রশ্নাবলী

1. "The Present course in Core Mathematics in our Secondary School is intended to be oriented to the use of Mathematics in daily life"—Examine the prescribed syllabus in core mathematics to indicate those aspects of it which bear upon this aim in particular. Is the teaching and learning of the subject as effective as desired? If not, suggest remedies for improvement. [C. U. B. T. '66]

2. The Curriculum for young people must be thought of in terms of activity and experience, not, as hitherto, in terms of passive assimilation by the pupil of material set before him by the teacher"—How does this view of curriculum affect the whole position of mathematics in Schools ? [C. U. B. T. '71]

3. Do you think that the present curriculum of mathematics in the Secondary stage in West Bengal will be helpful for realising the aims of teaching mathematics? Give reasons for your answer.

4. Mathematics should be made compulsory in the Secondary Education—Discuss. [C. U. B. T. '52]

5. Discuss the place of Mathematics in the Secondary Education.

6. Critically examine the mathematics curriculum in the School Education keeping in view the principles of curriculum construction.

॥ পঞ্চম অধ্যায় ॥

গণিতে মূর্তীকরণের স্থান এবং ব্যবহারিক কাজ ও উপকরণের ব্যবহার

(Place of Concretisation in Mathematics and Practical work and use of teaching appliances in Mathematics)

যা ইন্দ্রিয়-গ্রাহ্য, চোখে দেখে হাতে ধরে যাকে বোঝা যায় শিশুরা প্রথমে তাকেই ভালোভাবে চেনে। তাদের চিন্তায় প্রথম আসে মূর্ত জিনিসটি, ধীরে ধীরে তারা বিমূর্তের ধারণা করতে পারে। প্রথমে শিশু একটি পাখী দেখে—একটি, দুটি, এমনি ক'রে বহু পাখী দেখার পর পাখী সম্পর্কে তার সাধারণ ধারণা জন্মায়। তেমনি বলফ্রেমের সাহায্যে বা নুড়ির টুকরো বা পাথরকুচি বা তেঁতুলবিচি প্রভৃতির সাহায্যে ছেলেদের যোগ বিয়োগের সাধারণ নিয়ম সম্পর্কে ধারণা হয়। অন্যান্য সামাজিক ও পরিবেশ সংক্রান্ত বিভিন্ন বিষয়ের ধারণাগুলিও এরূপ মূর্ত ও প্রত্যক্ষমূলক অভিজ্ঞতা থেকেই সৃষ্টিলাভ করে। গণিতের ক্ষেত্রে সংখ্যার ধারণা সৃষ্টির ব্যাপারে মন্তেসরী কম-বেশী দৈর্ঘ্যের লাঠির সাহায্য নিতে বলেছেন। অনেকে দেখিয়েছেন গাণিতিক ধারণা সৃষ্টি কয়েকটি নির্দিষ্ট মানসিক বিজ্ঞান ও স্তর অনুসরণ করে চলে। তবে মানসিক বিকাশের স্তর অনুসরণ করলেই শুধু পরিনমণের (Maturation) দ্বারা ধারণা সৃষ্টি করা যায় না। সেখানেও মূর্ত বস্তুকে অবলম্বন করতে হয়।

গণিতের প্রাথমিক ধারণা সৃষ্টিতে মূর্তবস্তুর স্থান

যে কোন বিষয় শিক্ষা দিতে গেলে বিষয়টির প্রতি শিক্ষার্থীর আগ্রহ সঞ্চার আগে করতে হয়—বিষয়টি শিখতে শিশুকে অনুপ্রাণিত করতে হয়—তার প্রেষণা (motivation) জাগাতে হয়। তাই গণিত শিক্ষণে প্রথম ও প্রধান কাজ হ'ল শিক্ষার্থীর চাহিদার পরিপ্রেক্ষিতে প্রেষণা সৃষ্টি। তাছাড়া গণিত শিক্ষণ শিশুর কাছে অর্থপূর্ণ হওয়া একান্ত দরকার।

গণিতে আগ্রহ ও প্রেষণা সৃষ্টিতে মূর্ত-বস্তুর স্থান

গণিত শিক্ষায় প্রেষণা সৃষ্টি ও অর্থপূর্ণ শিক্ষাদানের মৌলিক নীতিই হ'ল ঃ

অর্থপূর্ণ গণিত শিক্ষার মূলনীতি

(১) শিক্ষার্থীর পরিচিত পরিবেশের মূর্ত বস্তু অবলম্বন ক'রে গণিতের ধারণা ও নিয়মগুলি গড়ে তোলা ;

(২) মূর্ত বস্তু থেকে ধীরে ধীরে, ধাপে ধাপে বিমূর্ত ধারণা ও প্রতীকে উন্নীত হওয়া।

সুতরাং গণিতশিক্ষাকে বাস্তবানুগ ও ব্যবহারিক করতে হলে প্রেষণা সৃষ্টি ও অর্থপূর্ণ উপস্থাপনের প্রয়োজন এবং তা সম্ভব গণিতের মূর্তীকরণের মাধ্যমেই। সক্রিয়তা হ'ল শিশুর স্বাভাবিক ধর্ম। গণিত শিক্ষার ক্ষেত্রে এই সক্রিয়তাকে কাজে লাগাতে হ'লে গণিতে মূর্ত বস্তুর ব্যবহার অপরিহার্য। পরীক্ষামূলক কাজ বা কাজের মাধ্যমে শিক্ষা বা মূর্তবস্তুর সাহায্যে শিক্ষা পদ্ধতির মধ্য দিয়ে গণিত শিক্ষা স্থায়ী ও আকর্ষণীয় হয়। কারণ গণিতের সৃষ্টিই হ'ল পরীক্ষামূলক কাজের মধ্য দিয়ে। মানুষ প্রথম সংখ্যা গণনা করতে শিখল বা সংখ্যা আবিষ্কার করল পরীক্ষামূলক ঘটনার মাধ্যমে অর্থাৎ নুড়ির সাহায্যে মেষগণনার পরিপ্রেক্ষিতে। তাই মানব-জাতির ক্রমবিকাশ ও গণিতের ক্রমবিবর্তন যদি সত্য হয় তাহলে মূর্তবস্তুর মাধ্যমে পরীক্ষামূলক কাজের মধ্য দিয়ে গণিত শিক্ষা স্বাভাবিক হতে বাধ্য।

মূর্তীকরণ পদ্ধতি ও গণিত শিক্ষা

ব্যবহারিক পটভূমিকায় গণিত শিক্ষার শিক্ষাগত মূল্যও রয়েছে। এতে সংগতিপূর্ণ ও সুসামঞ্জস্যপূর্ণ ব্যক্তিত্ব গড়ে ওঠে। অন্তর্মুখী ও বহির্মুখী ধর্মের মধ্যে সংগতিবিধান সম্ভব হয়, সৃজনাত্মক কল্পনাকেও বিকশিত করে। এর দ্বারা বিভিন্ন বিষয়ের সঙ্গে সম্পর্ক স্থাপন করা যায়। সাধারণ জীবনের ব্যবহারিক বহু বিষয়বস্তুর সঙ্গে গণিতকে যুক্ত করা যায়। তাই গণিত শিক্ষা তথা সাধারণ শিক্ষার ক্ষেত্রেও মূর্তীকরণের স্থান অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ।

মূর্তীকরণের শিক্ষাগত মূল্য

মূর্তীকরণের উপায় ঃ (Process of Concretisation)

গণিতকে মূর্ত করার প্রধান উপায় হ'ল শিক্ষাসহায়ক উপকরণ ও ব্যবহারিক কার্যাবলীর প্রবর্তন। 'Example is better than precept',—এই প্রবাদ বাক্যের মূলে গভীর সত্য নিহিত রয়েছে। দৃষ্টান্ত বা উপকরণ-এর সাহায্যে কিংবা ব্যবহারিক বা পরীক্ষামূলক কাজের মাধ্যমে গণিত শিক্ষণ হয় স্বাভাবিক ও অর্থপূর্ণ।

গণিত শিক্ষায় শিক্ষ'-উপকরণ ও ব্যবহারিক কাজ

গণিতে ব্যবহারিক কাজ (Practical Work) :

ব্যবহারিক কাজ বা Practical work বলতে শুধু বিজ্ঞান-সম্পর্কীয় বিষয়গুলির কথা আমরা প্রথমে চিন্তা করি। কিন্তু গণিতের মূর্তীকরণে পরীক্ষামূলক বা ব্যবহারিক কাজকে স্বীকার করা হয়েছে। প্রাথমিক স্তর থেকে শুরু ক'রে পরবর্তী স্তর এমনকি উচ্চস্তরেও স্মৃতি ও কল্পনাকে মূর্ত করে চিন্তা, বিশ্লেষণ ও সংশ্লেষণের মাধ্যমে শিক্ষার্থীরা গাণিতিক ধারণাগুলির অর্থ, প্রক্রিয়া, মূলনীতি ও সম্বন্ধ নির্ণয় করে, নির্ভুলতা ও দ্রুততার অভ্যাস এবং দক্ষতা অর্জন করে এবং ব্যবহারিক জীবনে গণিতের জ্ঞানকে প্রয়োগ করতে পারে। সুতরাং গণিতশিক্ষণে ব্যবহারিক কাজের গুরুত্ব অনস্বীকার্য। নিম্নে কয়েকটি **ব্যবহারিক কাজের তালিকা** দেওয়া হল :

ব্যবহারিক কাজ ও তার তালিকা

(১) সংখ্যা পড়া, লেখা ও গণনার জন্য রঙীন ও আকর্ষণীয় ছবি দেখা ও ছড়ার আবৃত্তি, সংখ্যার প্রতীক সমন্বিত বিভিন্ন কার্ড সংগ্রহ।

(২) প্রথম চারটি নিয়ম শেখানোর জন্য পুঁতির মালা, বলফ্রেম, মার্বেল, বল প্রভৃতির ব্যবহার, শ্রেণীর ছাত্র-ছাত্রীদের গণনা করা, বৃত্তাকার গুণন চার্ট তৈরী করা, দৈর্ঘ্য, ওজন প্রভৃতির তুলনা করা, ক্যালেণ্ডারের মাধ্যমে দিন ও মাস গণনা করা প্রভৃতি।

(৩) বলফ্রেম বা Abacus-এর সাহায্যে সংখ্যার স্থান নির্ণয় করা, শ্রেণীকক্ষ, বাগান, আসবাবপত্র, জানালা-দরজা প্রভৃতির দৈর্ঘ্য ও ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা।

(৪) বিভিন্ন পাত্রে অবস্থিত তরল পদার্থ পরিমাপ করতে শেখা, ঘড়ি থেকে সময় নির্ণয় করা, বৃত্ত, চোঙ, ঘনবস্তু, শঙ্কু প্রভৃতির পরিচয় করা।

(৫) কোন সম্পূর্ণ অংশ থেকে ভগ্নাংশ নির্ণয় ও পরিচয় করা।

(৬) হিসাবপত্র লেখা ও দেখা।

(৭) লেখচিত্র ও নকশা তৈরী ও ব্যবহার করা।

(৮) সমস্যার চিত্রায়ণ ও প্রতীক তৈরী এবং তাদের ব্যবহার করা।

(৯) স্কেল ও অন্যান্য পরিমাপের সহজ ও সরল যন্ত্রপাতি তৈরী করা।

(১০) কাগজ ভাঁজ করে গাণিতিক ধারণাকে উপলব্ধি করা।

(১১) বৃত্ত, পরিধি, ব্যাস প্রভৃতির মডেল তৈরী ও সম্বন্ধ নির্ণয় করা।

(১২) চার্ট তৈরী ও প্রয়োগ করতে শেখা প্রভৃতি।

উপরের ব্যবহারিক কাজগুলি সুষ্ঠুভাবে সম্পাদন করতে হলে যাদের না হ'লে চলে না সেগুলি হ'ল (১) **বিভিন্ন যন্ত্রপাতি** (২) **গণিতের পরীক্ষাগার**

(৩) **বিভিন্ন উপকরণ** (৪) **গণিতের পাঠাগার ও পাঠ্যপুস্তক** (৫) **গণিত ক্লাব** এবং (৬) **গণিত শিক্ষক।**

বিভিন্ন যন্ত্রপাতি ঃ গণিতকে মূর্ত করতে হ'লে ব্যবহারিক কাজের পরিপ্রেক্ষিতে গণিতের পরীক্ষাগারে বিভিন্ন বস্তু ও যন্ত্রপাতি রাখতে হবে। সেগুলির মধ্যে কাগজ, পিস্‌বোর্ড, কার্ডবোর্ড, কাঠের টুকরো, বাটালি, করাত, গঁদআঠা, বিভিন্ন রং, মোম, ফিতা, বিভিন্ন স্কেল, ওজন করবার যন্ত্র, ঘন-মাপক নল, স্লাইড-রুল, জ্যামিতিক যন্ত্রপাতি, গণনাসংক্রান্ত যন্ত্রপাতি, কোণ-বিশিষ্ট আয়না, সাধারণ টেবিল, থার্মোমিটার, ব্যারোমিটার, বলফ্রেম, তেঁতুলবীচি, নুড়ি, বিভিন্ন মডেল, রোলিং ব্ল্যাকবোর্ড, গ্রাফবোর্ড, রঙ্গিন-চক, ঘড়ি, প্রভৃতি উল্লেখযোগ্য।

যন্ত্রপাতি

পরীক্ষাগার ঃ (Mathematics Laboratory) গণিতের পরীক্ষাগার অন্যান্য বিজ্ঞান বিষয়ে পরীক্ষাগার থেকে একটু পৃথক। এই **পরীক্ষাগারের প্রধান কাজ হ'ল বাস্তব ও কার্যকরী অভিজ্ঞতার সঙ্গে পরিচিত করা ও অন্যান্য ক্ষেত্রে গণিতের ব্যবহারিক প্রয়োগ করা।** তাছাড়া পরীক্ষাগারের মাধ্যমে শিক্ষার্থী **নিজের ভুলত্রুটি** সম্পর্কে প্রত্যক্ষ অভিজ্ঞতার মাধ্যমে **সতর্ক** হতে থাকে। শিক্ষার্থীদের মধ্যে **আগ্রহ ও প্রেষণা সঞ্চার** করার ক্ষেত্রেও পরীক্ষাগারের অবদান কম নয়। এই পরীক্ষাগারের মাধ্যমে **সত্যবস্তু সম্পর্কে একটা মূল্যবোধও** গড়ে ওঠে। এই পরীক্ষাগার পদ্ধতি সম্পর্কে আলোচনা আমরা পূর্বেই করেছি। এর জন্য যন্ত্রপাতিরও কিছু প্রয়োজন, যেটি আগেই উল্লিখিত হয়েছে।

পরীক্ষাগার

যন্ত্রপাতি ও পরীক্ষাগার স্থাপন সম্পর্কে বর্তমানে অনেক **অসুবিধা** দেখা যায় যেমন ঃ (১) অর্থাভাব (২) উপযুক্ত মনোভাব ও আগ্রহের অভাব (৩) ভারাক্রান্ত ও পরীক্ষাকেন্দ্রিক পাঠক্রম (৪) গণিত সম্পর্কে প্রচলিত ভীতি এবং (৫) বিভিন্ন স্তরে অনুবন্ধের অভাব। এই অসুবিধা দূর করতে হ'লে **যৌথ ও সামাজিক প্রচেষ্টা** দরকার। তবে এগুলি দূর করতে পারলে এবং পরীক্ষাগার পদ্ধতির মাধ্যমে গণিতকে উপস্থাপন করলে গণিতকে নিজমর্যাদায় প্রতিষ্ঠা করা শক্ত হবে না।

পরীক্ষাগার স্থাপনের অসুবিধা

বিভিন্ন উপকরণ ঃ যে সব বস্তু ব্যবহার করলে শিক্ষার্থীদের **স্মৃতি ও কল্পনাশক্তিকে উদ্দীপ্ত** ক'রে তোলা সম্ভব হয় ও তাদের **শিক্ষণীয় বিষয়কে স্পষ্ট ও প্রাঞ্জল** করে তোলা যায় তাকেই বলা হয় **শিক্ষা সহায়ক উপকরণ** বা **শিক্ষাপ্রদীপন।**

প্রদীপনের সংজ্ঞা

গত কয়েক বছর ধরে শ্রুতি-নির্ভর ও দৃষ্টি-নির্ভর প্রদীপনের প্রয়োজনীয়তা শিক্ষার ক্ষেত্রে এক গুরুত্বপূর্ণ স্থান অধিকার করেছে। প্রায় প্রতিটি পাঠ্যবিষয়ে এই প্রদীপনের ব্যবহার দেখা যায়। যেমন—চার্ট, মডেল, মানচিত্র, গ্লোব, টেপরেকর্ডার, এপিডায়োস্কোপ, ম্যাজিক-লণ্ঠন, দেওয়াল পত্রিকা, টেলিভিশন,গ্রামোফোন, শিক্ষামূলক ভ্রমণ প্রভৃতি। কিন্তু পূর্বে গণিত শিক্ষার ক্ষেত্রে ব্ল্যাকবোর্ড, চক, স্কেল, জ্যামিতিক যন্ত্রপাতি ছাড়া অন্য কোনও প্রদীপনের প্রচলন ছিল না। কারণ বিমূর্ত গণিতকে শিক্ষার প্রদীপন ব্যবহারের অনুপযুক্ত বলে বিবেচিত হ'ত। কিন্তু উপরের যুক্তিগুলি ভিত্তিহীন। কারণ **গণিত মোটেই বিমূর্ত বিষয়** নয়। এটি **একটি সম্পূর্ণ মনোবিজ্ঞানসম্মত মূর্ত বিষয়**। তাই অন্যান্য বিষয়ের মত গণিত শিক্ষার ক্ষেত্রেও প্রদীপন ব্যবহার অবশ্যই কর্তব্য।

গণিতে প্রদীপন ব্যবহারের যুক্তি

গণিতে **প্রদীপন ব্যবহারের উদ্দেশ্যগুলো** হ'ল ঃ

(১) গণিতের বিমূর্ত চিন্তাধারা ও জটিল সমস্যার সরলীকরণ,

(২) গাণিতিক সমস্যা সমাধানের পথ আবিষ্কার,

(৩) গণিতের মৌলিক তত্ত্ব আয়ত্তীকরণ ও আহরণের সুবিধা,

প্রদীপন ব্যবহারের উদ্দেশ্য

(৪) আনন্দের মাধ্যমে পরিচিত পরিবেশের সহায়তায় গণিত শিক্ষণ স্থায়ী করা,

(৫) স্মৃতি ও কল্পনাশক্তির উদ্দীপন,

(৬) শ্রেণীকক্ষে বাস্তব পরিবেশ সৃষ্টি,

(৭) পর্যবেক্ষণ ও স্বজ্ঞা শক্তির উৎকর্ষ।

প্রদীপন ব্যবহার সম্পর্কে মতামত ঃ শিক্ষা-প্রদীপন ব্যবহারের প্রয়োজনীয়তাও যেমন রয়েছে, তার ব্যবহার সম্পর্কে কিছুটা সতর্কতারও প্রয়োজন আছে। শিক্ষকেরা অনেক সময় অতি উৎসাহের বশে প্রদীপনের আধিক্য সৃষ্টি করেন। শিক্ষক-শিক্ষণ মহাবিদ্যালয়ে কোন কোন শিক্ষক-শিক্ষার্থীর মধ্যে অত্যধিক উপকরণ ব্যবহারের প্রবণতা দেখা যায়। আমাদের মনে রাখতে হবে উপকরণের বাহুল্যে আসল বিষয়বস্তুটি যেন চাপা না পড়ে। উপকরণগুলি যেন শ্রেণী-উপযোগী ও বিষয়-উপযোগী হয় এবং নির্দিষ্ট সময়ে দক্ষতার সঙ্গে সুষ্ঠুভাবে ব্যবহৃত হয়।

প্রদীপন ব্যবহারের মতামত

গণিতশিক্ষার ক্ষেত্রে কয়েকটি শিক্ষা প্রদীপন ও তার উপযোগিতা ঃ

(১) **ব্ল্যাকবোর্ড ঃ** শিক্ষাসহায়ক উপকরণের তালিকায় **ব্ল্যাকবোর্ডের**

স্থান সর্বাগ্রে। সম্ভব হ'লে প্রতিটি গণিত শিক্ষার **শ্রেণীতে দুটো** ক'রে **ব্ল্যাকবোর্ড রাখা** উচিত। একটি **নির্দেশদানের** জন্য এবং অপরটি **গাণিতিক সমস্যাগুলিকে সমাধানের** জন্য। **শিশু-শ্রেণীতে** দেওয়ালের **চারপাশে** অনেকগুলি **ব্ল্যাকবোর্ড** রাখা ভালো, যাতে শিশুরা যে যেখানে আছে উঠে দাঁড়িয়ে চক্ নিয়ে বোর্ডে অংক করতে পারে এবং শিক্ষকও তাদের কাজ সহজেই দেখতে পারেন। এই পদ্ধতি সাধারণ শিক্ষা-পদ্ধতি থেকে পৃথক হ'লেও উৎসাহ-সঞ্চারক ও আনন্দদায়ক।

ব্ল্যাকবোর্ড ও তার উপযোগিতা

চোখে দেখে আর শিক্ষকের মুখে শুনে ব্ল্যাকবোর্ডের সাহায্যে **বিষয়বস্তু** শিক্ষার্থীর মনে **চিরস্থায়ী** হয়। শ্রেণীকক্ষের শোভাবর্দ্ধনের জন্য যেন ব্ল্যাকবোর্ড রাখা না হয়। "Blackboard is the mirror of the teacher's mind" বলেছেন এক শিক্ষাবিদ। Raymont বলেছেন "Blackboard-1rawings, Sketches and Maps are superior to finished products, at least, in the earlier stages." Weber এর মতে "Verbal descriptions aided by diagramatic representation appears to be more effective than verbal descriptions used alone"

(২) **চার্ট বা নক্সা :** গণিতের বিভিন্ন সমস্যা এবং তথ্য বিভিন্ন রঙের সাহায্যে চার্টের মাধ্যমে শিক্ষার্থীর সামনে উপস্থাপন করা যায়। এই প্রদীপন তৈরীর ক্ষেত্রে সাধারণ ড্রইং কাগজ ব্যবহার করাই ভালো। চার্ট তৈরী করার পর চার্টটির দুই প্রান্তে কাঠের টুকরো দিয়ে এবং একদিকে যে কোন রঙীন সূতোর সাহায্যে আংটা তৈরী ক'রে দেওয়ালে বা বোর্ডে টাঙ্গিয়ে দেওয়া হয়। গণিতের ক্ষেত্রে দশমিক ভগ্নাংশের চার্ট, জটিল ভগ্নাংশের চার্ট, ভগ্নাংশ সম্পর্কীয় প্রাথমিক ধারণার চার্ট, সুদকষা সম্পর্কীয় নানা ধরণের ছবি বা নক্সা, বীজগণিতের সূত্রাবলী সরলীকরণের চার্ট বা নক্সা, জ্যামিতির বিভিন্ন উপপাদ্য ও স্বতঃসিদ্ধ প্রমাণের চার্ট, ত্রিকোনমিতি, ঘনজ্যামিতি, পরিমিতি প্রভৃতির ক্ষেত্রেও চার্ট ও নক্সার মাধ্যমে **গণিত শিক্ষণ হয় প্রাণবন্ত ও কার্য্যকরী।**

চার্ট ও তার উপযোগিতা

(৩) **মডেল : মডেল** হ'ল একটি জিনিসের যথাসম্ভব **সঠিক অনুকৃতি।** মডেলের সাহায্যে **গাণিতিক তথ্য উপস্থাপন** করলে গাণিতিক **ধারনা হয় বাস্তব।** মডেল শিক্ষার্থীদের মধ্যে **আগ্রহ ও আনন্দ সঞ্চার** করে। **মডেলের**

সমষ্টিমূলক ও সৃজনীমূলক প্রয়োজনীয়তাও রয়েছে। মডেল শিক্ষার্থীদের মধ্যে সৌন্দর্য্যানুভূতি জাগ্রত করে। মডেল সম্পর্কে বলা হয়, "Mathematical models need not be accurate representation of a function, but they need to be constructed with a reasonable care. They must also be suitable materials. It is sufficient, if they enable the student to visualize the problem and follow the algebraic analysis involved. Mathematical models serve not to prove propositions but to demonstrate problems." গণিতের ক্ষেত্রে বীজগণিতে সূত্রাবলী সরলীকরণে, জ্যামিতি ও পরিমিতিতে ত্রিভুজ, ঘনবস্তু, চোঙ, শঙ্কু প্রভৃতির ক্ষেত্রফল, ঘনফল নির্ণয়ে, ত্রিকোনমিতির বিভিন্ন কোনানুপাত, বৃত্তীয়মান প্রভৃতি নির্ণয়ে, ঘনজ্যামিতিতে বিভিন্ন উপপাদ্য প্রমানে মডেলের ব্যবহার অনস্বীকার্য।

মডেল ও তার উপযোগিতা

উপরোক্ত প্রদীপন ছাড়াও গণিত শিক্ষার ক্ষেত্রে জ্যামিতিক যন্ত্রপাতি, রঙীন চক্, বিভিন্ন গ্রাফবোর্ড, ছবি প্রভৃতির ভূমিকাও সর্বজনস্বীকৃত। তবে গণিত শিক্ষার ক্ষেত্রে যে কথা সর্বাগ্রে মনে রাখতে হবে সেটা হ'ল প্রদীপনের যাথার্থতা ও নির্ভুলতা। কারণ, ত্রুটিপূর্ণ প্রদীপন গণিত শিক্ষার ক্ষেত্রে বিশেষ ক্ষতিকারক।

অন্যান্য প্রদীপন

গণিতের পাঠাগার ও পাঠ্য পুস্তক ঃ (Mathematical Library and Text-Book) বিদ্যালয়ে **গণিতের পাঠাগারের** বিশেষ স্থান রয়েছে। গণিত পাঠাগারের মাধ্যমে একদিকে যেমন শিক্ষক গণিতশিক্ষার আধুনিক পদ্ধতি, গণিতে **প্রেষণাসৃষ্টির উপাদান** এবং **গণিত সম্পর্কীয় অতিরিক্ত উদাহরণ ও কার্যাবলী সংগ্রহ** করতে পারে, তেমনি অপরদিকে শিক্ষার্থী **আনন্দের উপকরণ সংগ্রহ** করে, বিষয়টীর **বিশেষীকরণের জন্য পটভূমি তৈরী** করতে পারে।

গণিত পাঠাগার ও তার স্থান

বিদ্যালয়ে সাধারণতঃ **তিন ধরণের পাঠাগার** দেখা যায় (১) **কেন্দ্রীয় পাঠাগার** (২) **বিষয় পাঠাগার** (৩) **শ্রেণী পাঠাগার**। তবে পশ্চিমবঙ্গের বেশীর ভাগ বিদ্যালয়ে কেন্দ্রীয় পাঠাগারই রয়েছে যেখানে শিক্ষক ও শিক্ষার্থী উভয়েই পড়াশুনা করে। **গণিত শিক্ষকের কাজ হ'ল** যে, পাঠাগারে গণিত সম্পর্কীয় উপযুক্ত ও উন্নত গুণসম্পন্ন পাঠ্য পুস্তক নির্বাচন ও সঠিক ব্যবহার করা ও করানো।

পাঠাগারের শ্রেণীবিভাগ

গণিতপাঠাগারে যে সমস্ত ধরণের **পুস্তক অন্তর্ভুক্ত** করতে হবে সেগুলি হ'ল

(১) গণিতশিক্ষার লক্ষ্য ও পদ্ধতি সম্পর্কীয় পুস্তকাবলী (বিশেষতঃ শিক্ষকদের ব্যবহারে)

পাঠাগারের বিভিন্ন গণিত পুস্তকাবলী

(২) বিষয়বস্তু ও পাঠক্রম সম্পর্কীয় পুস্তকাবলী

(৩) আনন্দসৃষ্টিকারী গণিত পাঠ্যপুস্তক

(৪) অন্যান্যক্ষেত্রে গণিতের জ্ঞানপ্রয়োগ সম্পর্কীয় পুস্তকাবলী

(৫) গণিতক্লাব, প্রদর্শনী, আলোচনা-চক্র সম্পর্কিত বিভিন্ন রিপোর্ট

(৬) গণিতের ইতিহাস সম্পর্কিত পুস্তকাবলী

এ ছাড়া গণিত শিক্ষকের প্রয়োজন মত অন্যান্য পুস্তকাবলী ও অন্তর্ভুক্ত করা যেতে পারে।

গণিত শিক্ষণে **গণিত পাঠ্য পুস্তকের** মূল্যও কম নয়। গণিতের মূল ভিত্তি হ'ল কাজের মাধ্যমে শিক্ষা, মূর্ত থেকে বিমূর্ত চিন্তার দিকে যাওয়া, আবিষ্কারের দৃষ্টিভঙ্গী গড়ে তোলা প্রভৃতি। এক্ষেত্রে পাঠ্য পুস্তক অপরিহার্য্য। তেমনি গণিত শিক্ষার লক্ষ্য হিসেবে শিক্ষার্থীদের মানসিক শক্তি, তথা চিন্তা, বিচার, যুক্তি প্রভৃতি শক্তির উৎকর্ষতার জন্য প্রয়োজন, উপযুক্ত পাঠ্য পুস্তকের।

গণিত পাঠ্যপুস্তকের অপরিহার্যতা

তাই বলা হয় "**No education seems to be worth the name which has not made children at home in the world of books and so related them, mind to mind, with thinkers who have dealt with knowledge.**" তাছাড়া পাঠ্য পুস্তকের মাধ্যমে পাঠপরিকল্পনা, পুনরালোচনা প্রভৃতি সুষ্ঠুভাবে করা সম্ভব। তাই পাঠ্য পুস্তকের ক্ষেত্রে দুটি বিষয়ের প্রতি বিশেষ দৃষ্টি দেওয়া দরকারঃ (১) **নির্বাচন** ও (২) **সদ্ব্যবহার**। নির্বাচনের ক্ষেত্রে **শিক্ষার্থীর স্বরূপ ও সমাজের চাহিদাকে** অগ্রাধিকার দিতে হবে। তেমনি নির্বাচিত **পুস্তকগুলির যথাযথ ব্যবহার ও প্রয়োগ** সম্পর্কেও শিক্ষককে সজাগ থাকতে হবে।

উত্তম পাঠ্য পুস্তক নির্বাচন করতে গেলে তার বৈশিষ্টগুলিকেও আমাদের জানতে হবে। উত্তম পাঠ্যপুস্তকের বৈশিষ্ট্য হ'ল (১) পাঠক্রমের সঠিক উপস্থাপন (২) বিষয়বস্তুর বিশ্লেষণ ও অনুবন্ধভিত্তিক উপস্থাপন পদ্ধতি (৩) সু-আকৃতি (৪) সহজ-লভ্য ও (৫) শিক্ষার্থীর মানসিক বয়সোচিত মান রক্ষা।

উত্তম পাঠ্যপুস্তক নির্বাচনের বৈশিষ্ট্য

পাঠ্যপুস্তকগুলির নির্বাচন ছাড়াও **পাঠাভ্যাসের** প্রয়োজন। তার জন্য নিয়মিত পরিকল্পনা করতে হবে, শিক্ষক ব্যতিরেকে পাঠ্যপুস্তককে নির্ভর করতে হবে, এককভাবে পাঠ করার কথা ভাবতে হবে এবং প্রতিদিনের পাঠ নিয়মিতভাবে তৈরী করতে হবে। তাহলেই পাঠ্যপুস্তক নির্বাচন ও ব্যবহারের সার্থকতা বোঝা যাবে।

পাঠাভ্যাস

(৫) **গণিত ক্লাব** (Mathematics Club): বর্তমান শিক্ষাব্যবস্থায় বিভিন্ন বিষয়ের সহপাঠক্রম কার্য্যাবলীকেও পাঠক্রমের সঙ্গে সংযুক্ত করা হয়েছে। **গণিত ক্লাব** এরূপ এক **সহপাঠক্রম কার্যাবলীর সংগঠন**।

গণিত ক্লাব ও তার কার্যাবলী

গণিত ক্লাবের **মূল উদ্দেশ্য** হ'ল **গণিত পাঠে উৎসাহ বৃদ্ধি** ও **গণিতের জ্ঞান বৃদ্ধি**। এখানে শিক্ষার্থীরা **নিজেদের অনুভূতি ও আবিষ্কৃত নানা রকম গাণিতিক সমস্যা, ধাঁধা খেলা** প্রভৃতির বিষয় উত্থাপন করে। গণিত ক্লাবে ব্যক্তিগত ও সমষ্টিগত উভয় প্রক্রিয়াতেই গণিত চর্চা করতে পারে। সবশ্রেণীর গণিতে আগ্রহী শিক্ষার্থীরাই এই ক্লাবের সভ্য হতে পারে। তবে সংখ্যায় বেশী হ'লে একই বিদ্যালয়ে ২/৩ টী গণিত ক্লাব রাখা যেতে পারে।

এই ক্লাবের কাজগুলি হ'ল :

(১) ধাঁধা ও বিভিন্ন বুদ্ধিযুক্ত গাণিতিক সমস্যার সংগ্রহ ও সমাধান।

(২) ম্যাজিক-বর্গ পূর্ণ করা

(৩) খেলার ছলে ছড়া ও আর্যা প্রভৃতির অভ্যাসের মাধ্যমে আবৃত্তির দক্ষতা অর্জন করা

(৪) বিভিন্ন নক্সা, চিত্র, লেখ, মডেল, যন্ত্রপাতি প্রভৃতি তৈরী করতে শেখানো

(৫) বিভিন্ন গাণিতিক বিষয়ের নমুনা সংগ্রহ করা

(৬) স্থানীয় অঞ্চলের বিভিন্ন পরিসংখ্যান গ্রহণ ও ব্যাখ্যা

(৭) গাণিতিক আলোচনা

(৮) গানিতিক সমস্যা ও সমাধান সম্বলিত দেওয়াল পত্রিকার প্রকাশন প্রভৃতি

গণিত ক্লাবের সাফল্য নির্ভর করে শিক্ষার্থী ও শিক্ষক উভয়েরই যৌথ প্রচেষ্টায়। তবে ব্যক্তিগত চিন্তার উন্নয়নের প্রতিও লক্ষ্য রাখা এই ক্লাবের অন্যতম কাজ।

(৬) **গণিত শিক্ষক** (Mathematics Teacher): **আধুনিক শিক্ষার লক্ষ্য** হ'ল, শিশুর অন্তর্নিহিত সুপ্ত সম্ভাবনাগুলিকে এমনভাবে বিকশিত করা, যাতে, সে ক্রমে এক গণতান্ত্রিক সুনাগরিক হিসেবে নিজেকে প্রতিষ্ঠিত করতে পারে। **গণতান্ত্রিক সুনাগরিক হওয়ার** প্রথম বৈশিষ্ট্যই হ'ল **সঠিক সামাজিক দৃষ্টিভঙ্গী গঠন,** যা সম্ভব, চিন্তা, যুক্তি, বিচার ও ধৈর্য্যশক্তির উৎকর্ষতার মাধ্যমে। এই গুরুদায়িত্ব গ্রহণ করেছে গণিত। সুতরাং সেদিক থেকে **গণিত শিক্ষকেরও দায়িত্ব** কম নয়, কেননা শিক্ষার মূল উদ্দেশ্যকে রূপায়িত করে শিক্ষক। গণিত শিক্ষকের জ্ঞান, দক্ষতা, উপস্থাপন-পদ্ধতি ও বিষয়বস্তু-নির্ণয় ও সংযোজনা, আগ্রহ ও আস্থা, সহানুভূতি, ধৈর্য্য এবং বিষয় ও শিশুর প্রতি ঐকান্তিক ভালোবাসা না থাকলে গণিত শিক্ষণ কার্যতঃ নিরর্থক হয়ে পড়ে।

গণিত শিক্ষক ও তাঁর দায়িত্ব

প্রকৃত গণিত শিক্ষকের কাছে গণিত তাঁর **জীবনদর্শন**। শিক্ষককে জানতে হবে শিক্ষার্থীর চাহিদা, আগ্রহ ও তার মানসিক দক্ষতা। শিক্ষককে সজাগ থাকতে হবে শিক্ষার্থীর সামাজিক গুণাবলী ও তার পটভূমি সম্পর্কে। কেননা শিক্ষকই শিক্ষার্থীর মধ্যে আনবে আগ্রহ, জাগাবে প্রেষণা, সফল করবে গণিত শিক্ষণ।

গণিত জীবন দর্শন

গণিত শিক্ষকের গুণাবলী হিসাবে যেগুলি বিশেষ উল্লেখযোগ্য সেগুলি হ'ল:

গণিত শিক্ষকের গুণাবলী

(১) বিষয়ের প্রতি যথেষ্ট জ্ঞান

(২) বিষয়ের প্রতি আগ্রহ ও অনুরাগ

(৩) উপস্থাপন করার মত ধৈর্য্যশীল ও আকর্ষণীয় ব্যক্তিত্ব

(৪) শিশুমনোবিজ্ঞান সম্পর্কিত জ্ঞান

(৫) শিক্ষার উদ্দেশ্য, শিক্ষার পদ্ধতি ও তার প্রয়োগ সম্পর্কে যথেষ্ট জ্ঞান

(৬) বিষয়ের প্রতি ন্যায়বিচার

(৭) বিভিন্ন বিষয়ের সঙ্গে ও জীবনের সঙ্গে গণিতের অনুবন্ধ সৃষ্টি করার ক্ষমতা

(৮) বৈজ্ঞানিক সুলভ মনোভাব

(৯) মিষ্টস্বর ও সংযত উচ্চারণ

(১০) সহানুভূতি ও সহযোগিতামূলক মনোভাব

(১১) আদর্শ চরিত্র

(১২) ব্যবহারিক ও সামাজিক দৃষ্টিভঙ্গী
(১৩) উপস্থিত বুদ্ধি
(১৪) সৌন্দর্য্যানুভূতি ও শিল্পানুভূতি
(১৫) পরীক্ষামূলক দৃষ্টিভঙ্গী

এককথায় গণিতশিক্ষণকে প্রাণবন্ত করার জন্য যে সমস্ত গুণাবলী থাকার দরকার এক সুশিক্ষকের সব গুণাবলীর অধিকারী হতে হবে।

শিক্ষকের প্রস্তুতি ও পরিকল্পনা

শিক্ষকের প্রস্তুতি ও কাজের পরিকল্পনা (Teacher's preparation and planning): শ্রেণী শিক্ষার সার্থক রূপায়ণের মূলনীতিই হ'ল পরিমিত ব্যয় পূর্বক যথার্থ শিক্ষাদান করা। এক শিক্ষাবিদ বলেছেন: "Know exactly what you are going to teach, organise thoroughly, make the best use of all apparatus that can be obtained. Teach the whole class, try to be calm and natural. Remember, the good class teaching is class working. Make full use of the children's knowledge". সুতরাং **বিষয়বস্তুকে সঠিকভাবে আয়ত্ত** না ক'রে শ্রেণীতে শিক্ষার্থীদের পড়াতে যাওয়া একটা অপরাধ। যা পড়ানো হবে সে সম্পর্কে যদি শিক্ষকের সুস্পষ্ট ধারণা না থাকে তাহলে তার শিক্ষাদান হবে ব্যর্থ। শ্রেণীর পাঠ্যপুস্তকের তথ্যের ওপরে শুধু ভিত্তি করে শ্রেণীতে যাওয়া উচিত নয়। তাছাড়া যতই অভিজ্ঞ বা ডিগ্রীধারী শিক্ষক হোক না কেন তার স্মৃতিশক্তি সীমিত। তাই বিষয়বস্তু ব্যাপকভাবে আয়ত্ত না করে গেলে শ্রেণী কক্ষে অযথা সময় নষ্ট এবং লক্ষভ্রষ্ট হবার সম্ভাবনা থাকে। শিক্ষণক্রিয়া শিক্ষার্থীদের কতদূর উপকার সাধন করল তা বিচার করার বদলে শিক্ষককে শ্রেণীকক্ষে বিষয়বস্তু সম্পর্কে সর্বদা চিন্তিত ও ব্যস্ত থাকতে হয়। পাঠ সম্পূর্ণভাবে আয়ত্ত করে শ্রেণীকক্ষে গেলে তিনি বুঝতে পারবেন তাঁর প্রয়োজন কি কি এবং সেইভাবে পাঠকেও সংগঠন করতে পারবেন।

বিষয়বস্তুর সঠিক আয়ত্তীকরণের যুক্তি

গণিতশাস্ত্র আয়ত্তীকরণ দুভাবে করা যায়: (১) **শিক্ষণীয় বিষয়বস্তু** সম্পর্কে অগাধ ও ব্যাপক পড়াশুনা (২) **গণিত শাস্ত্রের বিরাট পরিধির** ব্যাপক পরিচিতি। অবশ্য শিক্ষাবিদরা দ্বিতীয় পদ্ধতির ওপরেই বেশী জোর দিয়েছেন।

গণিত শাস্ত্র আয়ত্তীকরণের উপায়

শিক্ষাদানের সময় শিক্ষকের আরও কতকগুলি বিষয়ের ওপর দৃষ্টি দেওয়া

অবশ্য কর্তব্য। যেমন: পাঠ **সহজবোধ্য ও হৃদয়গ্রাহী করার জন্য শিক্ষা-প্রদীপণের সুষ্ঠু ও সময়োপযোগী ব্যবহার, সমগ্র শ্রেণীকে শিক্ষাদানের চিন্তা, শিক্ষকের মানসিক স্থৈর্য্য এবং সমগ্র শ্রেণীকে কাজে ব্যস্ত রাখা।** এই সম্পর্কে Ryburn বলেছেন "Nothing will kill the interest of good pupils more quickly than to hold them back and make them sit mentally inactive. This must always be avoided." অর্থাৎ **যান্ত্রিকতা পরিহার করা একান্ত কর্তব্য।** আমাদের মনে রাখতে হবে "The main object of education is not to teach but to develop" বলেছেন Pestalozzi.

অন্যান্য সতর্কতা অবলম্বন

পাঠ বা কাজের পরিকল্পনা: শিক্ষকের কাজের পরিকল্পনাকে দুটো স্তরে ভাগ করা যায়: (১) শ্রেণীকক্ষের বাইরের কাজ এবং (২) শ্রেণীকক্ষের ভেতরের কাজ।

পাঠ-পরিকল্পনার স্তর

শ্রেণী কক্ষের বাইরের কাজ: এই অংশটাকেও দুভাগে ভাগ করা যায়। (১) **অধ্যায়গুলিকে সুবিধামত কয়েকটি** unit বা **এককে ভাগ** করা এবং প্রতিটি এককের জন্য নির্দিষ্ট বিষয়বস্তু স্থির করা এবং (২) **এককের বিষয়বস্তুগুলিকে শ্রেণীবদ্ধভাবে** উপস্থাপন করা এবং **নির্দেশদানের মাধ্যমে শিক্ষার্থীদের কাজে ব্যস্ত রাখা।**

শ্রেণীকক্ষের বাইরের কাজ

গণিতের ক্ষেত্রে শিক্ষনীয় একক বলতে **গাণিতিক নিয়ম ও সমস্যা সমাধানে তাদের প্রয়োগকেই বোঝায়।** অবশ্য এটা হ'ল Major unit। একেও কয়েকটা Minor unit-এ ভাগ করা যেতে পারে। যেমন, উদাহরণ-স্বরূপ: Major unit হ'ল: Algebraic Solution of Simultaneous equation। তার Minor unit হচ্ছে: (1) Development of rules and principles (2) Application of the same to solve problems. সুতরাং Major unit-কে সুবিধামত অনেকগুলি Minor unit-এ ভাগ করে শিক্ষাদান করা যায়। তবে Minor unit-এর পাঠগুলি যতটা সম্ভব স্বয়ংসম্পূর্ণ করতে হবে। প্রতিটি পাঠের শেষে যেন শিক্ষার্থী অনুভব করতে পারে যে, সে নির্দিষ্টভাবে কিছু নতুন বিষয় শিক্ষালাভ করেছে।

Major এবং Minor Unit ভিত্তিতে পাঠ প্রস্তুত

শ্রেণীকক্ষের বাইরে আর একটা কাজ হ'ল এককের **বিষয়বস্তুর সঠিক সংগঠন**। প্রতিটি এককের **তিনটে ধাপ** থাকবে : (1) Introduction (2) The Lesson proper এবং (3) Recapitulation. দ্বিতীয় ধাপ অর্থাৎ The Lesson Proper-এর ওপর সমস্ত পাঠটার কার্যকারিতা নির্ভর করে।

এককেরবিষয়বস্তুর সংগঠন

এই ধাপে গণিতের ক্ষেত্রে যে পদ্ধতি অবলম্বন করা হবে,সেই মত এই স্তরকে সংগঠিত করতে হবে, তবে প্রতিটি ক্ষেত্রেই Heuristic Attitude বা **আবিষ্কারকের দৃষ্টিভঙ্গীর স্থান থাকবে**। এইভাবে শ্রেণীকক্ষের বাইরে শিক্ষক পাঠ-পরিকল্পনা প্রস্তুত করবেন।

শ্রেণী কক্ষের মধ্যের কাজ : শ্রেণী কক্ষের মধ্যে এই পাঠপরিকল্পনাকে

শ্রেণীকক্ষের মধ্যের কাজ

কার্য্যকর করা খুবই কষ্টকর। পাঠ উপস্থাপন করার সময় প্রতিটি ছাত্রের **দক্ষতার কথা মনের মধ্যে রেখে** তার প্রগতি লক্ষ্য রাখতে হবে। প্রয়োজন হ'লে **ব্যক্তিগত মনোযোগও** দিতে হবে। অনেক সময় লক্ষ্য করা যায় যে শ্রেণীতে একটি কাজ দেওয়ার পর অল্প সময়ের মধ্যেই কয়েকজন কাজ শেষ করে ফেলল। সে ক্ষেত্রে যদি তাদের নতুন কাজ না দিয়ে অন্য সকলের কাজ শেষ না হওয়া পর্য্যন্ত অপেক্ষা করা যায়, তাহলে শ্রেণীশৃঙ্খলা হবে ব্যাহত। সুতরাং সেক্ষেত্রে হয় **তাদের নতুন কাজ দিতে** হবে, না হয় **যারা তখনও কাজ শেষ করতে পারেনি, তাদের সাহায্য করার নির্দেশ** দিতে হবে। তবে গণিত শিক্ষার ক্ষেত্রে বলা হয় যে, ঐ ধরণের সমস্যাকে এড়াতে হ'লে শ্রেণীতে

কাঠিন্যের ক্রমানুসারে সমস্যার উপস্থাপন

শিক্ষক এমন কতকগুলি গাণিতিক সমস্যা উপস্থাপন করবেন যেগুলি **কাঠিন্যের ক্রমানুসারে সাজানো** অর্থাৎ সহজ থেকে কঠিন ও কঠিনতর। তাহলে হয়তো ঐ সমস্যা শ্রেণীকক্ষে আর নাও উপস্থিত হতে পারে। তাই শ্রেণীকক্ষের মধ্যেই হোক আর বাইরেই হোক শিক্ষককে হ'তে হবে Sincere এবং Resourceful। তাই বলা হয় "The teacher must be sincere and resourceful to make effective class-room planning and its execution"

প্রশ্নাবলী

1. Discuss the place of Concretisation in the teaching of Mathematics in Secondary Schools.

2. Give a programme of possible practical works in the sphere of School Mathematics indicating in this connection the instruments and appliances that are necessary for this purpose.

3. Discuss briefly the various aids that are employed in the teaching of Mathematics.

4. What are the chief qualities and characterisic of a teacher of Mathematics ?

5. Write notes on :—

(a) Practical work and appliances in the teaching of Mathematics. [C. U. B. T. 66]

(b) The preparation of a teacher of mathematics and the planning of his work [C. U. B. T. 67]

(c) Mathematics club.

(d) Mathematics Textbook.

(e) Mathematical Library [C. U. B. Ed 71]

(f) Mathematical Laboratory.

॥ ষষ্ঠ অধ্যায় ॥

গণিত শিক্ষণে গণিত শাস্ত্রের ইতিহাস

(Place of History of Mathematics in the teaching of the subject)

গণিত-ইতিহাসের গুরুত্ব এবং তাৎপর্য : শিশুর বয়স বাড়ার সঙ্গে সঙ্গে সে যে সমস্ত **শারীরিক ও মানসিক স্তর** অতিক্রম করে সেগুলি **মানব জাতির ক্রমবিকাশের স্তরের অনুরূপ**। তবেপার্থক্য এই যে, মানব জাতির বিকাশ হাজার হাজার বছর ধরে ঘটেছে কিন্তু শিশুর স্তরোন্নতি হয় খুব অল্প সময়ের মধ্যেই। গণিত শিক্ষণ পদ্ধতিতে এই সত্য বিশেষ বিবেচনাধীন।

মানব জাতির বিবর্ত্তন ও শিশুর মানসিক স্তর

শিশুর স্বাভাবিক বিকাশ বাধাপ্রাপ্ত হ'লে শিশুর ব্যক্তিসত্বার পূর্ণতাপ্রাপ্তি হয় না। তাই **শিশুর প্রকৃতিকে প্রাকৃতিক নিয়ম অনুযায়ী পরিচালিত** করতে হয়। গণিতের ক্রমবিকাশ শিশুর মানসিক বিকাশের অনুরূপ হলেই গণিতের ইতিহাস শিশুর মানসিক বা স্বাভাবিক বিকাশকে সহায়তা করবে এবং শিক্ষকের পাঠদান হবে ফলপ্রদ।

শিশুর প্রকৃতি ও প্রাকৃতিক নিয়ম

বর্তমান বিজ্ঞান-নির্ভর যুগে বুদ্ধিগত বিকাশ ঘটানো বর্তমান শিক্ষা-ধারার এক অন্যতম লক্ষ্য। এই **বুদ্ধিগত বিকাশে গণিতের ক্রমবিকাশের ইতিহাস সত্যই গুরুত্বপূর্ণ**। কারণ, গণিতের মূলবৈশিষ্ট্য ও কর্মপন্থাগুলি কিভাবে গড়ে উঠেছে জানলে স্বাভাবিকভাবেই একটা মানসিক উৎকর্ষ গড়ে উঠতে পারে।

শিশুর বুদ্ধিগত বিকাশ ও গণিত ইতিহাস

শৈশবে শিশুর মধ্যে দুঃসাহসিকতা, রোমান্স, বিস্ময়, কৌতুহল প্রভৃতি মানসিক অবস্থাগুলির প্রাধান্য লক্ষণীয়। এই সময় শিশু সবকিছু জানতে চায়, বুঝতে চায়। সমস্ত বিষয়ে তার একটা অদম্য কৌতুহল দেখা দেয়। এই **কৌতুহলকে চরিতার্থ করতে গেলে গণিতের ইতিহাস একমাত্র অবলম্বন**। কেননা গণিতের ইতিহাস যেমন চিত্তাকর্ষক তেমনই শিক্ষাপ্রদ।

শিশুর কৌতুহল ও গণিত-ইতিহাস

অনেকের মতে গণিত শাস্ত্রের সঙ্গে দৈনন্দিন জীবনের কোন যোগ নেই। কিন্তু বাস্তবে দেখা যায় যে, আদিম যুগ থেকেই গণিত মানুষের জীবনের সঙ্গে অঙ্গাঙ্গীভাবে জড়িত। **মানুষের বাস্তব সমস্যা সমাধানে প্রধান ও প্রথম অঙ্গই হ'ল গণিত।** সুতরাং সেদিক থেকেও গণিতের ইতিহাস পাঠের সার্থকতা রয়েছে।

বাস্তব সমস্যা সমাধান ও গণিত ইতিহাস

বর্তমান সভ্যতার অগ্রগতি বা প্রাকৃতিক জগতের রহস্য উদ্ঘাটনের ক্ষেত্রে গণিতের অবদান অপরিসীম। তাই গণিতের ইতিহাসকে সভ্যতার ইতিহাস হিসাবে আখ্যা দেওয়া যায়। কারণ, সাধারণ-বিজ্ঞান, প্রয়োগ-বিজ্ঞান, অর্থনীতি, কৃষ্টি, মহাকাশ-অভিযান, পরমাণবিক-বিজ্ঞান প্রভৃতির ক্ষেত্রে গণিতের অবদান অনস্বীকার্য। সুতরাং **গণিতকে বাদ দিলে আমাদের বর্তমান সভ্যতা ধ্বংসপ্রাপ্ত হোত।** সেদিক থেকে **গণিতের ইতিহাসের তাৎপর্য লক্ষণীয়।** Glaisher এর মতে "I am sure that no subject loses more than mathematics by any attempt to dissociate it from its history." তাই গণিত শিক্ষণে গণিতের ইতিহাস যুক্ত করার সার্থকতা রয়েছে।

সভ্যতার অগ্রগতি ও গণিত ইতিহাস

প্রাচীন হিন্দু গণিত ও গণিতজ্ঞদের সম্পর্কে ঐতিহাসিক বিবরণ ঃ

প্রাচীন হিন্দুগণিতের অবদান ঃ কোনো বিষয়ের ঐতিহাসিক বিবর্তন কিংবা পটভূমি বিষয়টির উপস্থাপনের ক্ষেত্রে তাৎপর্য্যপূর্ণ নাও হ'তে পারে, কিন্তু **বিষয়টির ক্ষেত্রে দেশের বিখ্যাত মনীষীদের বিবরণ ও তাঁদের অবদান** নিঃসন্দেহে বর্তমান শিক্ষার্থীদের মনে আগ্রহ সঞ্চার করবে; শুধু তাই নয় শিক্ষার্থীরাও তাদের **পূর্বপুরুষদের উন্নতধরণের সঞ্চিত জ্ঞান সম্পর্কে গর্ব অনুভব** করবে এবং তাঁদের **জীবনী ও কার্য্যাবলীর মাধ্যমে নিজেরাও উৎসাহিত হবে** ও **মাতৃভূমিকে** ভালবাসবে।

বিখ্যাত মনীষীদের অবদান

গণিতের ক্ষেত্রে পাশ্চাত্য দেশসমূহের মনীষীদের বহু পূর্বেই প্রাচীন ভারতীয়রা কৃতিত্ব অর্জন করেন। প্রাচীন ইতিহাস থেকে আমরা জানতে পারি যে, খ্রীষ্টপূর্ব **২০০০অব্দে** ব্রাহ্মণ্য সাহিত্যের বিকাশ ঘটে। সেই সময়ে দর্শনশাস্ত্রের বিকাশের সঙ্গে সঙ্গে **বিজ্ঞান ও গণিতের বিকাশও লক্ষ্য** করা যায়। গণিতের ক্ষেত্রে পাটীগণিত, জ্যামিতি, বীজগণিত ও জ্যোতির্বিদ্যার বিকাশ উল্লেখযোগ্য।

খ্রীঃ পূঃ ৪০০ অব্দ থেকে ৪০০ খৃষ্টাব্দ পর্য্যন্ত সময়ের কালটি হ'ল ভারতের ক্ষেত্রে শিল্প ও বিজ্ঞান উন্নয়নের সময়কাল। গাণিতিক নিয়মকানুন সমন্বিত **জ্যোতির্বিদ্যার শ্রেষ্ঠ গ্রন্থ "সূর্য-সিদ্ধান্ত"** এই সময়েরই রচনা। প্রাচীন হিন্দুরা **"গণিত"** বলতে **"গণনা বা হিসাবের বিজ্ঞান"**'কেই বুঝত। এই গণিতের মধ্যে ছিল জ্যোতির্বিদ্যা, **ক্ষেত্রগণিত** (জ্যামিতি), **রাশিবিদ্যা** (তিন এর নিয়ম), **ভগ্নাংশ, সরল সমীকরণ, বর্গ বা দ্বিঘাত সমীকরণ, ঘনবস্তু সংক্রান্ত সমীকরণ, বর্গ-বর্গ বা দ্বি-ঘাত সমীকরণ** এবং **বিকল্প** (Permutation and combination)।

জ্যোতির্বিদ্যার শ্রেষ্ঠ গ্রন্থ 'সূর্য্য সিদ্ধান্ত

গণিতের কার্যাবলী সম্পাদিত হ'ত চকের সাহায্যে একটি বোর্ড বা 'পাটি'র উপর, যার থেকে নামকরণ হ'ল **'পাটিগণিত'**। ৬২৮ খৃষ্টাব্দের শেষভাগে **'ব্রহ্মগুপ্ত' গণিত থেকে 'বীজগণিত'কে পৃথকীকরণ** করলেন এবং তাঁর লিখিত পুস্তক **"ব্রহ্মস্ফুত সিদ্ধান্ত"**'তে এর নামকরণ করলেন **"কুট্টক"** (Kuttaka)। ৭৫০ খৃষ্টাব্দের শেষে **"শ্রীধর আচার্য্য"** 'পাটীগণিত' ও 'বীজগাণিত'কে পৃথক-পৃথক বিষয় হিসাবে অভিহিত করলেন এবং তখন থেকেই এই পার্থক্য চলে আসছে। হিন্দু ভারতীয়রা **পরিমিতি** সম্পর্কীয় সমস্যার মাধ্যমে **জ্যামিতির ব্যবহার** করেন। ৮০০ খৃষ্টাব্দের প্রাচীন **"সুল্বসূত্র"** (Sulvasutras)-তে দেখা যায় যে, হিন্দুরা যজ্ঞের **বেদি নির্মানের ক্ষেত্রে জ্যামিতির প্রয়োগ** করতেন। **পীথাগোরীয় সম্পর্ক-এর ব্যবহার**ও সেখানে দেখতে পাওয়া যায়।

প্রাচীনকালে পাটীগণিত ও বীজগণিতের ধারণা

ঋগ্বেদের সময় থেকে ভারতে **সংখ্যার ভিত্তি** হিসাবে দশগুনোত্তর সংখ্যালিখন পদ্ধতি গড়ে ওঠে। যেখানে দশ সহস্র বা অযুতের (১০৪) ওপরে গ্রীকদের, এক সহস্র (১০৩) বা হাজারের ওপরে রোমানদের নামকরণের কোন পরিভাষা ছিল না, সেখানে প্রাচীন হিন্দুরা অষ্টাদশস্থান বিশিষ্ট সংখ্যার নামকরণ সহজেই করেছেন। **প্রাচীন হিন্দুদের সবচেয়ে উল্লেখযোগ্য অবদান হ'ল "দশগুণোত্তর স্থান সম্পর্কীয় সংখ্যালেখার পদ্ধতি"** এবং "শূন্যের (০) আবিষ্কার।"

দশগুণোত্তর সংখ্যালিখন পদ্ধতি

দশগুণোত্তর সংখ্যার স্থান সম্পর্কীয় সংখ্যা লেখার পদ্ধতিঃ

৫০০ খৃষ্টাব্দ থেকে ১৪০০ খৃষ্টাব্দ পর্যন্ত গণিতের ক্ষেত্রে **হিন্দু ও আরবদের** অবদান কম নয়। হিন্দুরা **দশগুণের পরিপ্রেক্ষিতে সংখ্যার স্থানসম্পর্কীয় নীতি প্রয়োগ** করেন। এই স্থান-সম্পর্কীয় নীতি প্রাচীন **'পুরাণে'** আমরা দেখতে পাই। **'অগ্নিপুরাণে'** বলা হয়েছে যে, **একক স্থানের বিভিন্ন ও বহুগুণের বেলায় প্রতিটী স্থানের মান তার পূর্ব্ববর্তী স্থানের মানের দশগুণ হবে।** 'অগ্নিপুরাণ' দ্বিতীয়শতাব্দীর কাছাকাছি সময়ের লেখা। এ থেকে বোঝা যায় যে **লিখন পদ্ধতি প্রচলিত হবার পরবর্তীকালে সংখ্যার প্রতীকের আবিষ্কার হয়** এবং সেজন্যই **প্রথমদিকে সংখ্যাগুলি কথার মাধ্যমে লেখা হ'ত।** আবার **অনেকের মতে খ্রীঃ পূঃ ৮০০ অব্দ থেকেই ভারতে সংখ্যালিখন-পদ্ধতির প্রচলন হয়।** তবে আধুনিক প্রত্নতাত্ত্বিক আবিষ্কারের মাধ্যমে প্রমাণিত হয়েছে যে **ভারতীয় অক্ষর প্রাচীন উৎস থেকেই গৃহীত।** মহেঞ্জোদাড়ো ও হরপ্পায় আবিষ্কৃত নিদর্শন থেকে জানা গেছে যে **ভারতীয় হিন্দুরা এক সুসংহত সংখ্যার প্রতীকীকরণ পদ্ধতি প্রয়োগ করতেন।** সুতরাং **সংখ্যা লিখন-পদ্ধতি ও দশগুণোত্তর সংখ্যার স্থান সম্পর্কীয় ধারনাদানের** ক্ষেত্রে **ভারতীয় হিন্দুরাই পথ প্রদর্শক।**

সংখ্যালিখন ও দশ গুণোত্তর সংখ্যার স্থান সম্পর্কে ভারতীয় হিন্দু

শূন্য (০)-এর ব্যবহারঃ

খ্রীঃ পূঃ ২০০ অব্দের পূর্বেই **পিঙ্গল** (Pingala) শূন্যের ব্যবহার করেন। ৫০৫ খ্রীষ্টাব্দের লেখা **"পঞ্চ-সিদ্ধান্তিকা**'তে শূন্যের ব্যবহার দেখা যায়। ৬০০ খ্রীষ্টাব্দে **"জীনভদ্র গণি"**র লেখায় পাটীগণিতের গণনাকার্য্যে নির্দিষ্ট সংখ্যার প্রতীক হিসাবে শূন্যের ব্যবহার উল্লেখ রয়েছে। সংখ্যার **স্থানীয় মানতত্ত্বের** ক্ষেত্রে **ভাস্কর** (প্রথম) **শূন্যের ব্যবহার** করেছেন। ২৫০ খ্রীঃ পূঃ সময়ে **অশোক** কর্তৃক স্থাপিত **স্তম্ভে সংখ্যালিখন** দেখা যায়। এই সংখ্যা লিখন পদ্ধতি আরব ব্যবসায়ীদের দ্বারা ভারত থেকে ক্রমে ক্রমে পাশ্চাত্যে প্রবেশ করে। ০ (শূন্য) বা Zero এই কথাটা এসেছে ল্যাটিন শব্দ "Zephirum" থেকে যার অর্থ আরবীয় শব্দ "Sifr"এর সঙ্গে তুলনীয় এবং যেটী হিন্দুদের শূন্য (০)-র অনুবাদ অর্থাৎ 'খালি' ছাড়া আর কিছুই নয়।

শূন্যের ব্যবহার ও ভারতীয় হিন্দু

প্রাচীন ভারতীয় হিন্দু গণিতজ্ঞদের জীবনী ও কার্যাবলী ঃ

আর্য্যভট্ট (প্রথম) ঃ ভারতের **জ্যোতির্বিদ্যার** ক্ষেত্রে **আর্য্যভট্ট** (প্রথম)-এর নাম চিরস্মরণীয়। পাটনার কাছে কুসুমপুরে ৪৭৬ খৃষ্টাব্দে জন্মগ্রহণ করেন। তিনি **বীজগণিতের ক্ষেত্রে** কয়েকটি **নীতি আবিষ্কার** করেন। তাঁর প্রধান কার্যাবলী হ'ল **"আর্য্যভট্ট-তন্ত্র"** রচনা। এই পুস্তকের **চারটে** অংশ। প্রথম তিনটি **জ্যোতির্বিদ্যা** সংক্রান্ত এবং চতুর্থটিতে রয়েছে **পাটীগণিত, বীজগণিত** ও **জ্যামিতি** সম্বন্ধে তেত্রিশটি নিয়ম। তিনিই প্রথম পৃথিবীর **আহ্নিক গতির** উল্লেখ করেন এবং দেখান পৃথিবী এক বছরে সূর্য্যের চারদিকে ঘুরে আসে, যেটি পরবর্তীকালে ইউরোপের কোপারনিকাস এক হাজার পরে প্রমাণ করেন।

আর্যভট্টের অবদান

আর্য্যভট্ট **একঘাত সম্পর্কীয় সমীকরণ** আলোচনা করেন এবং দেখান ঃ

$$\Sigma x-x_1=a_1,\ \ \Sigma x-x_2=a_2, \ldots\ldots,\ \Sigma x-x_n=a_n,$$

যেখানে $\Sigma x=x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_n$

তিনি **গাণিতিক প্রগতি** সম্পর্কীয় n-সংখ্যার যোগফল নির্ণয়ের সূত্রও আবিষ্কার করেন এবং দেখান,

$$n=\frac{1}{2b}\{(8bs+(2a-b^2)^{\frac{1}{2}}+b\}$$

যেখানে n = পদসংখ্যা, s = শ্রেণীর যোগফল, a = প্রথম পদ-
এবং b = সাধারণ অন্তর।

তিনি **দ্বিঘাত সমীকরণ** সম্পর্কে ও গবেষণা করেন। বর্গমূল নির্ণয়ের একটি নিয়মও তিনি আবিষ্কার করেন। এই সূত্রের সাহায্যে তিনি π-এর মান 3·1416 নির্দিষ্ট করেন। তিনি **অসীম সমীকরণের সমাধানের** ক্ষেত্রেও চিরস্মরণীয়। **ত্রিকোণমিতিতে** তাঁর অবদান স্বকীয় বৈশিষ্ট্য বহন করে এবং পরবর্তী অগ্রগতিকে সহায়তা করে।

ব্রহ্মগুপ্ত (প্রথম) ঃ ভারতের **জ্যোতির্বিদ** ও **বীজগণিতজ্ঞদের** মধ্যে **ব্রহ্মগুপ্ত** (প্রথম) অন্যতম। মুলতানের কাছে ৫৯৮ খৃষ্টাব্দে জন্মগ্রহণ করেন। তিনি **"ব্রহ্মস্ফুত সিদ্ধান্ত"** রচনা করেন। বীজগণিত আরবদের কার্য্যাবলীকে ভিত্তি করেই ইউরোপে গড়ে ওঠে, কিন্তু **আরবদের কার্য্যাবলী ব্রহ্মগুপ্তেরই কার্য্যাবলীর নতুন রূপ।** জ্যামিতির ক্ষেত্রেও তাঁর অবদান কম নয়। তিনি **বাহুর পরিপ্রেক্ষিতে ত্রিভুজের এবং বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে সক্ষম হন।**

ব্রহ্মগুপ্তের অবদান

তিনি দেখান :

চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল $= [(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)]^{\frac{1}{2}}$

যেখানে s = অর্ধপরিসীমা, a, b, c, d = চারটে বাহুর দৈর্ঘ্য।

তিনি **বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয়-এর সম্পর্কও** নির্ণয় করেন এবং দেখান :

$$p^2 = (ab+cd)(ac+bd)/(ad+bc)$$

$$q^2 = (ac+bd)(ad+bc)/(ab+cd)$$

যেখানে p ও q কর্ণদ্বয় এবং a, b, c, d হ'ল বাহু চারটের দৈর্ঘ্য।

ব্রহ্মগুপ্ত $Nx^2 \pm c = y^2$ ধরণের **অসীম দ্বিঘাত-সমীকরণ** সম্পর্কীয় সমস্যার আলোচনা করেন, যার হিন্দুরা নাম করলেন "বর্গ-প্রকৃতি" অর্থাৎ Square-nature.

ব্রহ্মগুপ্ত দেখালেন যদি $Nx^2 + c = y^2$ সমীকরণে $x = \alpha$, $y = \beta$ হয়,

এবং $Nx^2 + c' = y^2$ সমীকরণে $x = \alpha'$, $y = \beta'$ হয়,

তাহলে $Nx^2 + cc' = y^2$ সমীকরণে $x = \alpha\beta' \pm \alpha'\beta$

এবং $y = \beta\beta' \pm N\alpha\alpha'$ হবে। একে বলা হয় ব্রহ্মগুপ্তর লেম্মা (Brahmagupta's lemma)।

আবার $Nx^2 + c = y^2$ সমীকরণে যদি $x = \alpha$, $y = \beta$ হয় তাহলে $x = 2\alpha\beta$ এবং $y = \beta^2 + N\alpha^2$ মানদ্বয় দ্বারা $Nx^2 + c^2 = y^2$ সমীকরণটী সিদ্ধ হবে। এর নাম হ'ল Brahmagupta's Corollary। এর থেকে বোঝা গেল $Nx^2 + 1 = y^2$ সমীকরণে যখন একদল সমাধান (one set of solution) করা যাবে, তখনই ঐ সমীকরণের **অসীম রাশির সমাধান** সম্ভব হবে।

ব্রহ্মগুপ্তের উপরোক্ত সমস্যাটি ১৭৬৪ সালে Euler এবং ১৭৬৮ সালে Lagrange পুনরাবিষ্কার করেন।

ব্রহ্মগুপ্ত **দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধানের** নির্দিষ্ট **নিয়মটীও** আবিষ্কার করেন, যেটি **শ্রীধর আচার্য্যের নিয়মের সঙ্গে সদৃশ।**

শ্রীধর আচার্য্য : ৭৫০ খৃষ্টাব্দে ইনি রাঢ়দেশে জন্মগ্রহণ করেন। তাঁর **পাটীগণিতের** বই **"ত্রিশলিকা"** স্তোত্রগানের মাধ্যমে রচিত। তিনি তাঁর গ্রন্থগুলির মধ্যে পাটীগণিতের সমস্যায় "Rule of False position" এর কয়েকটি নীতি প্রয়োগ করেছেন। দ্বিঘাত সমীকরণের বীজনির্ণয়ের ক্ষেত্রে এখনও পর্যন্ত **"শ্রীধর আচার্য্যের সূত্র"**

শ্রীধর আচার্য্য ও গণিত

নিজগুণে খ্যাত রয়েছে। তিনি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের জ্যামিতিক গুণাবলীরও আলোচনা করেছেন। শ্রীধর আচার্য্যও পাটীগণিত ও বীজগণিতকে পৃথক পৃথক বিষয় ব'লে অভিহিত করেছেন। শ্রীধর আচার্য্য ও ব্রহ্মগুপ্ত উভয়েই **একটি সংখ্যার বর্গ নির্ণয়ের সাধারণ নিয়ম** সম্পর্কে দেখান :

$$m^2 = (m-a)(m+a) + a^2$$

অনুরূপভাবে **শ্রীধর আচার্য্য একটি সংখ্যার ঘন নির্ণয় সম্পর্কে** দেখান :

$$n^3 = \sum_1^n \{3r(r-1)+1\}$$

তিনি **বর্গমূল ও ঘনমূল নির্ণয়ের পদ্ধতি** সম্পর্কেও আলোচনা করেন। **তিন নিয়ম এর পদ্ধতি** (Rule of Three) সম্পর্কে নির্দেশও দেন ব্রহ্মগুপ্ত। শ্রীধর আচার্য্য ঐ নীতির পরিপ্রেক্ষিতে সমস্যা সমাধানের জন্য '**ত্রৈরাশিক**' এবং **বিভিন্ন নিয়ম নির্ধারণ** করেন। তিনি পাটীগণিতের ক্ষেত্রে **শূন্যের** (০) **কার্য্যাবলী ও 'যৌগিক অনুপাত'** সম্পর্কেও আলোচনা করেন।

ভাস্করাচার্য্য : ভারতের প্রখ্যাত **জ্যোতির্বিদ** ও গণিতজ্ঞদের মধ্যে ইনি অন্যতম। দক্ষিণ ভারতের **বিদ্দরবীর** (Biddarvir) নামক গ্রামে ১১১৪ খ্রীষ্টাব্দে জন্মগ্রহণ করেন। ৩৬ বছর বয়সে তিনি **"সিদ্ধান্ত-শিরোমনি"** নামক গ্রন্থ রচনা করেন, যার খণ্ড চারটী : (১) **লীলাবতী** (পাটীগণিত) (২) **বীজগণিত** (৩) **গ্রহগণিতাধ্যায়** এবং (৪) **গোলাধ্যায়**। শেষ দুটি জ্যোতির্বিদ্যার ওপর রচনা। 'লীলাবতী' ছিলেন তাঁর সুন্দরী কন্যা। ভাস্করাচার্য্য জ্যোতিষশাস্ত্রের গণনা অনুযায়ী দেখেছিলেন যে লীলাবতী অল্পবয়সেই বিধবা হবেন। তাই তিনি গণনার মাধ্যমে তাঁর কন্যার বিবাহের নির্দিষ্ট তারিখ নির্ধারণ ক'রে দিনটী যে কোনক্রমে অন্যউপায়ে কাটিয়ে দিতে চেয়েছিলেন। তখনকার দিনে 'Water Clock এর মাধ্যমে সময় নির্ধারণ করা হত। যখন লীলাবতী জলের উপরিপৃষ্ঠ লক্ষ্য করছিলেন তখন তাঁর মুকুট থেকে কিছু অংশ জলের মধ্যে প'ড়ে গর্তটী বন্ধ হয়ে যায় এবং সময় হিসাবের পদ্ধতি সাময়িকভাবে বন্ধ হয়ে যায়। এইভাবে ঐ শুভ মূহুর্তটী অতিবাহিত হয় এবং তাঁর কন্যার ভাগ্যকে পুনরুদ্ধার করেন। তাই কন্যাকে সান্ত্বনা দেবার জন্য ভাস্করাচার্য্য তাঁর প্রথম গ্রন্থের নামকরণ করেন **"লীলাবতী"**।

ভাস্করাচার্যের অবদান

লীলাবতী

ভাস্কর π এর মান নির্ণয়ের ক্ষেত্রে নির্দিষ্ট মান হিসাবে 3927/1250 এবং আসন্নমান হিসাবে 22/7 নির্ধারণ করেন। ভাস্কর দুটী লক্ষণীয় অভেদ নির্ণয় করেন।

$$(a \pm b^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{\{a+(a^2-b)^{\frac{1}{2}}\}}{2}\right]^{\frac{1}{2}} \pm \left[\frac{\{a-(a^2-b)^{\frac{1}{2}}\}}{2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

যেটী এখনও পর্য্যন্ত বীজগণিতে **দ্বিমাত্রিক রাশিবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণে** ব্যবহৃত হচ্ছে। **তিন নিয়মের পদ্ধতির** ক্ষেত্রে তাঁর অবদান রয়েছে। **অসীম সমীকরণ সমাধানের** বিভিন্ন নিয়মও তিনি নির্ণয় করেছেন। '0' বা **শূন্য সম্পর্কীয় অতি সূক্ষ্ম ধারণা** তাঁরই কীর্ত্তি।

মহাবীর ঃ নবম শতাব্দীর ইনি একজন প্রখ্যাত গণিতজ্ঞ। ইনি তাঁর গ্রন্থে **যোগ, বিয়োগ, বর্গ, বর্গমূল, ঋণাত্মক সংখ্যা ও শূন্য সম্পর্কে মূল্যবান নিয়ম** প্রভৃতি লিপিবদ্ধ করেন।

মহাবীর এর অবদান

শূন্য সম্পর্কে তাঁর ধারণা ঃ

(১) কোন রাশিকে শূন্য দিয়ে গুণ করলে গুণফলও শূন্য হবে (২) কোন রাশিকে শূন্য দিয়ে যোগ, বিয়োগ বা ভাগ করলে রাশিটির কোন পরিবর্তন হবে না।

গুণ পদ্ধতিতে ভাগের উত্তর মেলানো বা ভগ্নাংশের ভাগে গুণ নিয়মের সাহায্য নেওয়া তিনিই প্রথম চালু করেন। তিনি **দ্বিঘাত সমীকরণ** সম্পর্কেও গবেষণা করেছেন। ব্রহ্মগুপ্তের π এর মান $\sqrt{10}$ বলে গ্রহণ করেন।

পাশ্চাত্ত্য গণিতজ্ঞদের অবদান ঃ

পীথাগোরাস ঃ (৫৮৪ খ্রী : পূ :—৪৯৫ খ্রী: পূ:)

ইনি **থেলসের শিষ্য**। **জ্যামিতি ও সংখ্যাবিজ্ঞানে** তাঁর অবদান অপরিসীম। জ্যামিতিকে প্রমাণসিদ্ধ একটি খাঁটী বিজ্ঞানের পর্য্যায়ে তিনি নিয়ে যান। তাঁর **সমকোণী ত্রিভুজ সংক্রান্ত উপপাদ্য** আজও **"পীথাগোরাসের উপপাদ্য"** নামে খ্যাত। **ত্রিভুজের তিনকোণের সমষ্টি নির্ণয়, ক্ষেত্রফল ও ঘনফল সংক্রান্ত সূত্র নির্ণয়, সমগ্র সংখ্যাকে যুগ্ম ও অযুগ্ম রাশিতে পরিণত** করা তাঁরই কীর্ত্তি। তিনি দেখান ঃ $2n+1=(n+1)^2-n^2$ অর্থাৎ যে কোন **অযুগ্ম রাশি, দুই বর্গ রাশির অন্তরের সমান**। তিনি আরো দেখান ঃ 1 থেকে $(2n+1)$ পর্য্যন্ত **সমস্ত অযুগ্ম রাশির যোগফল একটি বর্গরাশি** অর্থাৎ $(n+1)^2$.

পীথাগোরাস এর অবদান

ইউক্লিড : ইনি মিশরের অধিবাসী। গণিতশাস্ত্র অধ্যয়ণের জন্য আলেকজান্দ্রিয়ায় আসেন এবং পরে আলেকজান্দ্রিয়া বিশ্ববিদ্যালয়ে গণিত বিভাগের দায়িত্ব নেন। এটি খৃঃ পূঃ ৩০০ অব্দের কথা। তাঁর **সর্বশ্রেষ্ঠ কীর্ত্তি**—"Elements" নামক **জ্যামিতির বই**। এ বইটা ১৩ খণ্ডে সম্পূর্ণ। ১ম, ২য়, ৪র্থ, ৫ম, ও ৬ষ্ঠ খণ্ডে রয়েছে **রেখা, ক্ষেত্রফল, সাধারণ সরলরৈখিক ক্ষেত্রসম্পর্কীয় আলোচনা**, ৩য় খণ্ডে আছে **বৃত্ত সম্পর্কীয় আলোচনা**। ৭ম, ৮ম, এবং ৯ম খণ্ডে **সংখ্যা সংক্রান্ত বিভিন্ন উপভোগ্য নিয়মকানুন রয়েছে**। এখানে **গ. সা. গু, ল. সা. গু, জ্যামিতিক প্রগতি** এবং **সূচকের নিয়মাবলীও অন্তর্ভুক্ত** হয়েছে। ১০ম খণ্ডে রয়েছে $(a^{২} \pm b^{২})^{\frac{1}{2}}$ ধরণের **অমূলদ সংখ্যার আলোচনা**, যেখানে a এবং b ধনাত্মক সংখ্যা। একাদশ ও দ্বাদশ খণ্ডে আছে **ঘন জ্যামিতি**। ত্রয়োদশ খণ্ডে রয়েছে ত্রিমাত্রিক ঘনবস্তুর ধর্মসংক্রান্ত আলোচনা।

ইউক্লিডের আলোচনা

তাঁর **সমান্তরাল সংক্রান্ত স্বতঃসিদ্ধটি** পরবর্তীকালে **সমালোচিত** হয় এবং **আবিষ্কৃত** হয় **অ-ইউক্লিডীয়** জ্যামিতি। তিনি **জ্যোতির্বিজ্ঞান** ও **সংগীত** সম্পর্কেও বই লেখেন।

কেপলার : ইনি ১৫৭১ খৃষ্টাব্দে জার্মানদেশে জন্মগ্রহণ করেন। ইনি **জ্যোতির্বিদ** ও **গণিতজ্ঞ** হিসাবে খ্যাত। গ্রহের গতি ও আয়তন নির্ণয়ে তাঁর অবদান অনস্বীকার্য।

কেপলার

নিউটন : ১৬৪২ খৃষ্টাব্দে ইংলণ্ডের উলস্থ্রপে ইনি জন্মগ্রহণ করেন। তাঁর কীর্তির মধ্যে **মাধ্যাকর্ষণ, পরিবর্তনশীল বিন্দুর পরিবর্তনের হার** যার বর্তমান নাম Differential Calculus, **দ্বিমাত্রিকরাশির উপপাদ্য, বলবিদ্যা, জ্যোতির্বিদ্যা, বীজগণিত ও স্থানাঙ্ক জ্যামিতি সংক্রান্ত বহুসূত্র নির্ণয়** প্রভৃতি উল্লেখযোগ্য।

নিউটন

কোপারনিকাস : ১৪৭৩ সালে পোলাণ্ডে এঁর জন্ম। **জ্যোতির্বিজ্ঞানে** এঁর অবদান সর্বজনস্বীকৃত। **চন্দ্র ও নক্ষত্রের গতিপথ নির্ণয়ের** ক্ষেত্রে তিনি অদ্বিতীয়।

কোপারনিকাস

গ্যালিলিও (১৫৬৪-১৬৪২) **:** **দোলনতত্ত্ব, হাইড্রোষ্ট্যাটিক ব্যালেন্স,** থার্মোমিটার, টেলিস্কোপ, **শক্তি ও গতিসংক্রান্ত নিয়ম, বলবিদ্যা, জ্যোতির্বিদ্যা** প্রভৃতির ক্ষেত্রে তাঁর অবদান রয়েছে।

গ্যালিলিও

নেপিয়ার (১৫৮০)ঃ এঁর বিখ্যাত আবিষ্কার **লগারিদ্‌ম**।

ব্রিগস্‌ (১৫৫৬-১৬৩১)ঃ **১০মূল বিশিষ্ট লগারিদ্‌ম** আবিষ্কার এঁর কীর্ত্তি।

অন্যান্য গণিতজ্ঞ

দেকার্টে (১৫৯৬-১৬৫০)ঃ **স্থানাঙ্ক জ্যামিতি ও সমীকরণের চিহ্নের নিয়ম** সম্পর্কে এঁর অবদান অপরিসীম।

ফার্মাট (১৬০১-১৬৬৫)ঃ **জ্যামিতি, সম্ভাব্যতার সমস্যা** প্রভৃতি **আবিষ্কার ও সমাধানে** এঁর অবদান আছে।

ওয়ালিস (১৬১৬-১৭০৩)ঃ **অসীমরাশি শ্রেণী সম্পর্কীয় ধারণা** এঁর কীর্ত্তি।

প্যাস্কাল (১৬২৩-১৬৬২)ঃ **গণনার যন্ত্র, শঙ্কুসংক্রান্ত-জ্যামিতি** প্রভৃতি তাঁর অবদান।

লেইবিনিৎস (১৬৪৬-১৭১৬)ঃ **Differential** এবং **Integral Calculus ও গণনার যন্ত্র**-এর ক্ষেত্রে এঁর অবদান রয়েছে।

অন্যান্য গণিতজ্ঞ ঃ

গাণিতিক বিশ্লেষণে Leonhard Euler (১৭০৭-১৭৮৩), **মাধ্যাকর্ষণ ব্যাখ্যায় ক্যালকুলাসের প্রয়োগে** Laplac, General Dynamics, Theory of Orbit, **আপেক্ষিকতত্ত্ব** প্রভৃতির ক্ষেত্রে Birkhoff, **বিশ্লেষণ** ও **পাটীগণিত সংক্রান্ত সমস্যার সমাধানে** Hardy, Modular Equation, Theorem of Complex Multiplications, Continued Fractions প্রভৃতি বিষয়ে **শ্রীনিবাস রামানুজন**, ত্রিকোণমিতিক কোণ ও তার মান নির্ণয়ের ক্ষেত্রে **হিপারকাস**, বীজগণিতের প্রতীকের ক্ষেত্রে **ডায়োফ্যাণ্টাস**, শঙ্কু-জ্যামিতির ক্ষেত্রে **অ্যাপোলোনিয়াস**, বৃত্ত সংক্রান্ত বিভিন্ন মান নির্ণয়ে **আর্কিমিডিস**, বিন্দু ও রেখাকে বর্ণমালার অক্ষর দিয়ে প্রকাশ করার ক্ষেত্রে **হিপোক্রেটস** প্রভৃতি গণিতজ্ঞদের নাম উল্লেখ করা যায়।

সংখ্যার ইতিহাস ঃ আমরা আগেই আলোচনা করেছি যে, **ভাষা আবিষ্কারের পর সংখ্যা আবিষ্কার** হয়েছিল। প্রথমদিকে মানুষ গণনা করতে জানতো না। সে জানতো যে কোন বিশেষ একটি হ'ল এক বা one। ক্রমশঃ সে দুটি বা তিনটি জিনিসের পার্থক্য করতে শিখল। কিন্তু তখনও সে জানতো না যে, এক আর একে দুই হয়। তাছাড়া **সংখ্যাগুলোর বিশেষ কোনো নামও ছিল না**।

তখনকার দিনে মেষ পালন ছিল মানুষের প্রধান উপজীবিকা। যদি কোনো মেষ-পালককে বলতে হ'ত যে, তার পাঁচটি মেষ আছে, তখন সে **পাঁচটি নুড়ীকে একত্র করে দেখিয়ে বলতো** "আমার এতগুলি মেষ আছে"। **পরে** যখন মেষের সংখ্যা বেড়ে গেল তখন **একটি নুড়ীর সাহায্যে একটি মেষকে নির্দেশ না ক'রে একদল মেষ-এর বদলে একটা নুড়ীকে রাখতো। সংখ্যা বা দলের পার্থক্য, পর্য্যবেক্ষনের সাহায্যেই বুঝতো।** কিন্তু কালক্রমে **যুক্তির প্রয়োজন দেখা দিল।** যে মেষের সংখ্যা এতদিন নুড়ীর সাহায্যে প্রকাশ করতো এখন **সংখ্যার সাহায্যে প্রকাশ** করতে লাগলো। **ক্রমে ক্রমে** সংখ্যাগুলির **বিশেষ বিশেষ নামও আবিষ্কৃত** হ'ল। ছোট বড় বিভিন্ন দল ঠিক ক'রে **সংখ্যার ভিন্ন ভিন্ন নামও** দেওয়া হ'ল।

সংখ্যার ক্রমবিবর্ত্তন

সংখ্যাগণনা ও সেগুলিকে লেখার পদ্ধতি শেখার জন্য মানুষের লেগেছে হাজার হাজার বছর। প্রথম মানুষ গাছের ছালে খোদাই ক'রে সংখ্যা প্রকাশ করতো। কিন্তু এই পদ্ধতি খুব বড় সংখ্যা লেখার ক্ষেত্রে অসুবিধা হওয়ায়, **চিহ্নের সাহায্যে বড় সংখ্যা প্রকাশ** করার চেষ্টা হ'ল। যেমন : I, II, III, IV, V……X… …L(50)… …C(100)………M(1000)। আবার বড় সংখ্যার বাম দিকে ছোট সংখ্যা বসিয়ে বিয়োগ এবং ডানদিকে বসিয়ে যোগ করার পদ্ধতিও আবিষ্কৃত হ'ল। যেমন : 60(XL), 105(CV), 9(IX) ইত্যাদি। **এগুলি রোম-এর অবদান।**

সংখ্যালিখন

প্রতীক বা চিহ্নের সাহায্যে সংখ্যা প্রকাশ করতে অনেক সময় লাগতো। তাই গণনার জন্য **মানুষ আবিষ্কার করল** Abacus (**গণনার-তালিকা**)। এটা প্রথম **চীন ও জাপানে** ব্যবহৃত হয়।

প্রতীক বা চিহ্ন

সংখ্যা আবিষ্কারের পর আবিষ্কৃত হ'ল ০ (শূন্য)। এটা **ব্যাবিলোনীয়দের আবিষ্কার।** তবে তাদের সভ্যতা ধ্বংস হওয়ার পর **শূন্যের পুনরাবিষ্কার করে ভারতীয়রা,** যার আলোচনা আমরা আগেই করেছি।

শূন্য

ক্রমে ক্রমে **ষষ্ঠদশ শতকে দশমিক পদ্ধতি আবিষ্কৃত হ'ল। সপ্তদশ শতাব্দীতে গণিতের ক্ষেত্রে বিভিন্ন রকম গবেষণা ও আবিষ্কার** সম্ভব হ'ল, যার আলোচনা আমরা বিভিন্ন গণিতজ্ঞদের অবদান শীর্ষে করেছি।

দশমিক পদ্ধতি

গণিতের ইতিহাসের মূল্য (Values of the History of Mathematics): Hogben-এর মতে **"গণিত সভ্যতার দর্পণ"।** গণিতের ইতিহাস পাঠের দ্বারা আমরা মানব সভ্যতার ক্রমবিবর্তন সম্পর্কে জ্ঞান অর্জন করি। গণিতের ইতিহাস পাঠের **শিক্ষাগত মূল্য** আজ সর্বজন-স্বীকৃত। শিশুর কাছে গণিতে **আগ্রহ ও প্রেষণা সৃষ্টির** পক্ষে গণিতের ইতিহাস সত্যই অপরিহার্য, কারণ গণিতের ইতিহাস যেমন চিত্তাকর্ষক তেমনই রসপূর্ণ। গণিত শিক্ষায় গণিতের ইতিহাসের সাহায্যে অন্ততঃ **কিছু কিছু বিষয় শিক্ষালাভ** করতে শিক্ষার্থী বিষয়টিতে অধিকতর আগ্রহী ও মনোযোগী হবে।

শিক্ষাগত মূল্য:

(১) গণিতের ইতিহাস শিক্ষার মধ্য দিয়ে শিক্ষার্থীরা জানতে পারে যে, **বাস্তব প্রয়োজনের তাগিদেই গণিতের জন্ম ও অগ্রগতি।**

(২) মানুষই এই গণিতের স্রষ্টা জেনে তারা তাদের **গৌরবময় ঐতিহ্যের জন্য গর্ব অনুভব** করে এবং **নতুন আবিষ্কারের প্রেরণা** লাভ করে।

(৩) ব্যবহারিক প্রয়োজনে গণিতকে কাজে লাগানোর কথা জেনে শিক্ষার্থীর মনে গণিত সম্পর্কে একটা **বাস্তব মূল্যবোধ** জাগে।

গণিত-ইতিহাস শিক্ষণের মূল্য

(৪) অপেক্ষাকৃত কঠিন বিষয়গুলির উৎপত্তিগত বা ঐতিহাসিক ক্ষেত্রগুলি জানতে পারলে আপাত **নীরস বিষয়গুলি সরল ও সহজভাবে বোধগম্য** হয়।

(৫) **গণিতের প্রতীক, নাম বা পদ-এর ধারণা গণিতের ইতিহাসের সঙ্গে** যুক্ত। উপযুক্ত ঐতিহাসিক পটভূমিকার মধ্যে এগুলির উপস্থাপন কার্যকরী হয়।

(৬) **চিত্র ও অন্যান্য মূর্ত এবং যথাসম্ভব বাস্তব উপকরণের সাহায্যে গণিতের ইতিহাস শিক্ষা** দিলে গণিত সম্পর্কে স্থায়ী আগ্রহ সৃষ্টি হয়।

(৭) গণিতের ইতিহাস শিক্ষার্থীর **দ্রুত সিদ্ধান্ত** করার স্বাভাবিক প্রবণতাকে **বন্ধ** করতে পারে।

(৮) গণিতের ইতিহাস গণিতের বিভিন্ন বিভাগকে বিচ্ছিন্নভাবে না দেখে

একই বিষয়ের অন্তর্গত সুসংবদ্ধ শাখা হিসাবে দেখার মনোভাব জাগ্রত করে।

(৯) গণিতের ইতিহাস সুষ্ঠুভাবে উপস্থাপন করলে **শিক্ষক সম্পর্কে শিক্ষার্থীদের শ্রদ্ধা বৃদ্ধি** পায় ও শ্রেণী শৃঙ্খলা বজায় রাখা যায়।

(১০) গণিতের ইতিহাস থেকে **গণিত শিক্ষণের বিভিন্ন স্তরগুলির সঠিক পরিচয়** পাওয়া যায়, যেগুলি গণিত শিক্ষণের ক্ষেত্রে প্রধানতম অঙ্গ।

গণিত ইতিহাসের এত শিক্ষাগত মূল্য থাকা সত্ত্বেও বিদ্যালয়ে গণিতের ইতিহাস শিক্ষা দেওয়া সম্ভব হচ্ছে না। অনেকে বলেন যে, গণিতের ইতিহাস পাঠক্রমে যুক্ত করলে প্রচলিত অস্বাভাবিক দীর্ঘ ও জটিল আকৃতি বিশিষ্ট গণিত পাঠক্রম আরও কঠিন ও দুর্বোধ্য হয়ে পড়বে। কিন্তু এ ধারণা অযৌক্তিক, তার প্রমাণ গণিতের ইতিহাসের শিক্ষাগত মূল্যবোধ। সুতরাং

মাধ্যমিক স্তরে গণিত ইতিহাস

মাধ্যমিক স্তরে অন্ততঃ কয়েকটি বিষয়ে যেমনঃ সংখ্যা, দশমিক, সমীকরণ, বর্গ, ক্ষেত্রফল নির্ণয়, ঘনমূল নির্ণয় প্রভৃতির ক্ষেত্রে **গণিতের ইতিহাস**-এর **যথাযথ উপস্থাপন প্রয়োজন**। কেমন ক'রে ভারতে ও অন্যত্র প্রতীক ও বীজগণিতের সূত্র এবং অন্যান্য ব্যবহার প্রণালী গড়ে উঠেছিল তার কিছু নমুনা পাঠক্রমে অন্তর্ভুক্ত করা যেতে পারে। তাছাড়া মাধ্যমিক স্তরে প্রাচীন মিশরীয়রা কিভাবে জ্যামিতিকে ব্যবহারিক কাজে লাগাতো তার অনেক চিত্তাকর্ষক বিবরণ উপস্থাপন অনেক পরিমানে উপযোগী হতে পারে। এর সঙ্গে Euclid কিভাবে যুক্তিপূর্ণ জ্যামিতির সৃষ্টি করেন তাও উপস্থাপন করলে জ্যামিতির প্রতি আগ্রহ সৃষ্টি করা যায়।

সুতরাং **গণিতের ইতিহাসের সুনির্বাচিত অংশগুলির সঠিক উপস্থাপন গণিত-শিক্ষণকে করবে ফলপ্রদ** এবং **শিক্ষার্থীদের মধ্যে জাগাবে গণিতের প্রতি আগ্রহ ও প্রেষণা**। তাছাড়া গণিতের ইতিহাস

উপসংহার

সভ্যতার ইতিহাস। আর সভ্যতার অগ্রগতি গণিত-নির্ভর। তাই গণিত-শিক্ষণে গণিত-ইতিহাস-এর অন্তর্ভুক্তি অবশ্যই প্রয়োজন।

প্রশ্নাবলী

1. Discuss the place of the History of Mathematics in the teaching of the subject. (C. U. B. T. '67, '71)

2. Why is History of Mathematics essential in teaching Mathematics and when it should be introduced in the School curriculum ?

3. Give a Short account of the beginning and development of the number system.

4. Describe the contribution of mathematical knowledge made by Indian Hindus.

5. Discuss with examples the value of the study of History of Mathematics in mathematical instruction in Schools, and the manner in which this should be incorporated in the teaching of the subject with advantage. (C. U. B. T. '65)

॥ সপ্তম অধ্যায় ॥

গণিতে অনুবন্ধ
(Correlation in Mathematics)

অনুবন্ধের নীতি (Principle of Correlation) ঃ শিক্ষা এক সামগ্রিক প্রক্রিয়া। প্রতিটি অভিভাবক তার সন্তানকে বিদ্যালয়ে গণিত, ইতিহাস, ইংরাজী প্রভৃতি বিশেষ বিশেষ বিষয়ে শিক্ষালাভ করার বদলে সামগ্রিকভাবে শিক্ষা-গ্রহণ করতেই পাঠায়। কিন্তু বিদ্যালয়ে বিশেষজ্ঞদের হাতে বিষয়গুলি একক ভাবেই শিক্ষাদান করা হয়। ফলে জ্ঞান হয় খণ্ডিত, শিক্ষা হয় অসম্পূর্ণ। **নানা অভিজ্ঞতার মধ্য দিয়ে যে জ্ঞান আমাদের মধ্যে সঞ্চিত হয় সেই জ্ঞান রাশি পরস্পর সম্পর্কযুক্ত হয়ে শৃঙ্খলাবদ্ধ ও সুসজ্জিত হয়।** Herbart বলেন—পুরাতন জ্ঞানের সাহায্যেই আমরা নতুন জ্ঞান আহরণ করি। জীবনের যাত্রা পথে প্রতিনিয়তই আমরা নতুন অবস্থার সম্মুখীন হচ্ছি, নতুন নতুন অভিজ্ঞতালাভ করছি। এই নতুন অভিজ্ঞতাকে পুরানো অভিজ্ঞতার আলোকে বিচার ক'রে তার সঙ্গে সম্পর্কযুক্ত ক'রে নেওয়া হচ্ছে। এভাবে পূর্ব সঞ্চিত জ্ঞানরাশির সাহায্যে আমাদের জ্ঞানের পরিসর বৃদ্ধি পাচ্ছে। হার্বাটের মতে সুশৃঙ্খল ও সঙ্ঘবদ্ধ চিন্তাধারা সৃষ্টি করাই শিক্ষার আসল উদ্দেশ্য। তিনি এই চিন্তাধারা সৃষ্টির সম্পর্ক স্থাপন ও সমন্বয় সাধনকেই **অনুবন্ধের নীতি** আখ্যা দিয়েছেন। এই নীতি অনুসরণ করেই বলা যায় **জ্ঞান অখণ্ড** এবং **প্রত্যেক বিষয়ের জ্ঞান পরস্পর সম্পর্কযুক্ত।**

অনুবন্ধের নীতি

অভিজ্ঞতাই জ্ঞান

অনুবন্ধের আধুনিক মত (Modern opinion regarding Correlation) ঃ শিক্ষা সংক্রান্ত যে কোনো বিষয়েই একটি প্রধান ও মূল উপায় হল **বুদ্ধির ব্যবহার**। সুতরাং বুদ্ধির ব্যবহার বা মানসিক শক্তির ব্যবহার-এর সঙ্গে কম বেশী ভাবে প্রায় প্রত্যেক বিষয়ের শিক্ষণের একটা অনুবন্ধ আছে। আবার **ভাষার সুষ্ঠ ব্যবহারের** ওপরেও অনেক বিষয়ের শিক্ষা নির্ভর করে। সুতরাং ভাষার সংগত ব্যবহার, বুদ্ধি বা মানসিক শক্তির ব্যবহার প্রভৃতি হ'ল এক একটি **কেন্দ্রীয় পদ্ধতি**। পদ্ধতিগত ভাবে এগুলির সঙ্গে অনুবন্ধ রেখেই অন্যান্য

অনুবন্ধ সম্পর্কে আধুনিক মত

বিষয় শিক্ষা দান করা যায়। সেই রকম কোন একটি **কেন্দ্রীয় বিষয়ের সঙ্গে অনুবন্ধ** রেখেও অন্যান্য বিষয়ের বিষয়বস্তু নির্বাচন বা বিন্যাস করা যায়।

গণিতের ক্ষেত্রে অনুবন্ধ (Correlation in Mathematics)ঃ গণিত শাস্ত্রের প্রধান ভাগগুলি হ'ল **পাটীগণিত, বীজগণিত** ও **জ্যামিতি।** সাধারণতঃ বিদ্যালয়ে এগুলি পৃথকভাবে কিংবা বিভিন্ন শিক্ষক কর্তৃক পড়ানো হয়। এভাবে গণিতের শাখাগুলিকে কৃত্রিম ভাবে পরস্পর বিচ্ছিন্ন অংশ হিসাবে দেখানো হয়। **গণিতের বিবর্তন** লক্ষ্য করলে দেখি প্রথমেই আর্বিভূত হয় পাটীগণিত। তারপরই সৃষ্টি হয় জ্যামিতি ও বীজগণিতের। ক্রমে ক্রমে বীজগণিতের সঙ্গে জ্যামিতির মিলনে গড়ে উঠেছে স্থানাঙ্ক জ্যামিতি, ত্রিভুজে বীজগণিত ও জ্যামিতির প্রয়োগে আর্বিভূত হয়েছে ত্রিকোণমিতি, পাটীগণিত, বীজগণিত ও জ্যামিতির সংমিশ্রণে দেখা দিয়েছে ঘন ও ত্রিমাত্রিক জ্যামিতি। সুতরাং **গণিতের বিভিন্ন শাখা ও উপশাখাগুলি বিচ্ছিন্ন নয়, পরস্পর সম্পর্কযুক্ত।** দেশ, কাল, সংখ্যা ও গুণগত এবং পরিমাণগত প্রতীকের বিভিন্ন ব্যবহার ও কাজের ধারা অনুসারে গণিতের বিভিন্ন শাখাগুলি গড়ে উঠেছে। **শাখাগুলির মধ্যে গুণগত কোন পার্থক্য নেই।** বিষয়বস্তু ও পদ্ধতিগত দিক থেকে বিভিন্নভাবে গড়ে উঠলেও এগুলির মধ্যে মৌলিক সাদৃশ্যও কম নয়।

গণিতের বিভিন্ন শাখার মধ্যে অনুবন্ধ

মাধ্যমিক শিক্ষায় গণিতশিক্ষা সাধারণ শিক্ষারই পরিপূরক। তা ছাড়া **ব্যবহারিক জীবনে মাধ্যমিক-গণিতের সঙ্গে সাধারণ শিক্ষার বেশ সম্পর্ক** রয়েছে। সাধারণ শিক্ষার বিষয় সমূহের মধ্যে ইতিহাস, ভূগোল, বিজ্ঞান, অর্থনীতি, তর্কবিদ্যা, সমাজবিদ্যা মনোবিদ্যা প্রভৃতি বিষয়গুলির সঙ্গে গণিতের সম্পর্ক বিদ্যমান। সুতরাং সামগ্রিকভাবে শিক্ষাকে সার্থক করতে হলে **সাধারণ বিষয়গুলির সঙ্গেও গণিতের অনুবন্ধ** স্থাপন করা একান্ত প্রয়োজন। ব্যবহারিক জীবনেও গণিতের প্রয়োগ অনিবার্য্য। দৈনন্দিন জীবনধারণের, সামাজিক জীবনযাত্রার ক্ষেত্রে, মহাজাগতিক রহস্য উদ্ঘাটনে গণিত নিয়তই গতিশীল। তাই **জীবনের সঙ্গেও গণিতের অনুবন্ধ** স্থাপন করা অনিবার্য্য।

সাধারণ শিক্ষা ও গণিত

জীবনের সঙ্গে গণিত

গণিতের ক্ষেত্রে তাই অনুবন্ধকে প্রধানতঃ দুভাগে ভাগ করা যায় (১) **গণিতের বিভিন্ন শাখা ছাড়া অন্যান্য বিষয়** এবং **জীবনের সঙ্গে অনুবন্ধ** এবং (২) **গণিতের অন্তর্ভুক্ত বিভিন্ন শাখার মধ্যে অনুবন্ধ।**

গনিতের অনুবন্ধ ও তার শ্রেণীবিভাগ

গণিতের সঙ্গে অন্যান্য বিষয়ের এবং জীবনের অনুবন্ধ (Correlation of Mathematics with other subjects and with life) ঃ

বিজ্ঞান, কলা, কৃষ্টিমূলক বিভিন্ন বিষয়ের অগ্রগতিতে গণিতের অবদান পূর্বেই আলোচিত হয়েছে। সেই আলোচনা থেকে এটা পরিস্ফুট হয়েছে যে, যে **সমস্ত বিষয়ের শিক্ষাদানে গণিতের ব্যবহার অপরিহার্য্য,** গণিত শিক্ষণের সময় ঐ সমস্ত বিষয়ের সঙ্গে সম্বন্ধ যুক্ত করে শিক্ষা দেওয়া উচিত। **লেখচিত্র** পাঠদান কালে ভূগোল, অর্থনীতি, ইতিহাস, মনস্তত্ব, সমাজবিদ্যা প্রভৃতিকে সম্পর্ক যুক্ত করা যায়। **বীজগণিত, পাটীগণিত** প্রভৃতির পাঠদানকালে বিজ্ঞান, অর্থনীতি, ইতিহাস, মনস্তত্ব, সমাজবিদ্যা প্রভৃতিকে যুক্ত করা যেতে পারে। **এভাবে বিদ্যালয় গণিতের সঙ্গে এদের অন্যান্য পাঠ্যবিষয়ের মধ্যে সহজেই অনুবন্ধ নীতি অনুসরণ** করা যায়।

গণিত ও অন্যান্য বিষয়

গণিতের সঙ্গে দৈনন্দিন জীবনেরও যোগাযোগ ঘনিষ্ঠ। এমন অনেক চাকুরী এবং বৃত্তি আছে যেখানে গণিতের ব্যবহার অপরিহার্য্য। ক্রয়-বিক্রয়, মূল্য-নির্ধারণ, জমি-জরীপ, গৃহনির্মাণ, রন্ধনকার্য্য প্রভৃতি সবক্ষেত্রেই গণিতের প্রয়োগ রয়েছে। সেই জন্যই বলা হয় **গণিত হবে বাস্তব জীবনের অভিজ্ঞতাভিত্তিক এবং সমাজ-জীবনকেন্দ্রিক।** তারই পরিপ্রেক্ষিতে বর্তমান পাঠক্রমে অন্তর্ভুক্ত হয়েছে শতকরা হিসাব, সরল ও চক্রবৃদ্ধি সুদকষা, আয়কর-হিসাব, চিত্রলেখ, সার্ভে করা প্রভৃতি জীবনকেন্দ্রিক ব্যবহারিক বিষয়সমূহ। তাছাড়া জ্যামিতি, বীজগণিত ও পাটীগণিত পাঠদান-কালে **দৈনন্দিন জীবনের সঙ্গে এদের সম্পর্কযুক্ত** করতেই হয়।

গণিত ও জীবন

এভাবে গণিত ও তার শাখাগুলিকে **কেন্দ্রীয় বিষয় হিসাবে নির্বাচন** ক'রে অন্যান্য বিষয়ের এবং জীবনের সঙ্গে সম্পর্কযুক্ত শিক্ষা পদ্ধতি অবলম্বন করলে **গণিত শিক্ষণ সম্পূর্ণ ও ফলপ্রদ** হতে বাধ্য।

গণিত হবে কেন্দ্রীয় বিষয়

গণিতের বিভিন্ন শাখার মধ্যে অনুবন্ধ (**Correlation of Mathematics with its different branches**) **ঃ**

আমরা আগেই আলোচনা করেছি যে, গণিতের **কোন শাখাই সম্পূর্ণ বিচ্ছিন্ন নয়** এবং তাদের মধ্যে কোনো গুণগত পার্থক্যও নেই। তার প্রমাণ গণিতের বিভিন্ন শাখার উৎপত্তি ও সমন্বয়ের ইতিহাস ও বিবর্ত্তন। এই শাখাগুলির মধ্যে প্রত্যেকটির সঙ্গে অনুবন্ধ স্থাপন না করা গেলেও যখন যেটির সঙ্গে করা সম্ভব তখন অবশ্যই সেটি করা উচিত। যেমনঃ **পাটীগণিত ও বীজগণিত, পাটীগণিত ও পরিসংখ্যান এবং পরিমিতি, বীজগণিত ও জ্যামিতি, বীজগণিত ও ত্রিকোণমিতি, বীজগণিত ও পরিমিতি, বীজগণিত ও স্থানাঙ্ক জ্যামিতি, জ্যামিতি ও ত্রিকোণমিতি, জ্যামিতি ও পরিমিতি, জ্যামিতি ও স্থানাঙ্ক জ্যামিতি প্রভৃতির মধ্যে অনুবন্ধ** স্থাপন।

গণিতের বিভিন্ন শাখার মধ্যে অনুবন্ধ

পাটীগণিত ও বীজগণিত

বীজগণিতকে বলা হয় সাধারণীকৃত পাটীগণিত। যদি মনে করা যায় পাটীগণিত শিক্ষণ শেষ হ'লে বীজগণিত শিক্ষণ শুরু হবে, তাহলে খুবই ভুল করা হবে। কারণ, **বীজগণিতকে গণিতের কেন্দ্রীয় অধ্যায় হিসাবে ধরা হয়।** সুতরাং গণিতের কোন শাখাই বীজগণিতের অনুবন্ধ ছাড়া শিক্ষাদান করা উচিত নয়; বরং **বীজগণিতের প্রতীকের সাহায্যে পাটীগণিতের জটিল সমস্যার সমাধান** অতি সহজেই করা যায়। সেজন্য গণিতের নতুন পাঠক্রমে নবম ও দশমশ্রেণীতে পাটীগণিতের পাঠক্রমে অনুপাত ও সমানুপাত, শতকরা, সরলসুদ ও লাভক্ষতিকে বীজগণিতের সাহায্যে সমাধান করার পদ্ধতিকেও স্বীকার করা হয়েছে।

বীজগণিত গণিতের কেন্দ্রীয় অধ্যায়

পাটীগণিত ও বীজগণিত

পাটীগণিত ও বীজগণিতের মধ্যে অনুবন্ধনীতি প্রয়োগের সময় বিজ্ঞান সম্মত দৃষ্টিভঙ্গীর অভাবের জন্য এবং ত্রুটিপূর্ণ পদ্ধতির জন্য বীজগণিত প্রায়ই যান্ত্রিকস্তরে উপনীত হয়। এই যান্ত্রিকতা দূর করতে হলে **পাটীগণিতের মাধ্যমেই বীজগণিত শুরু করা উচিত।**

বীজগণিতকে আমরা সংক্ষিপ্ত পাটীগণিত বা ভাষার সংক্ষিপ্তরূপ বলে থাকি।

বীজগণিতের সাহায্যে পাটীগণিতের অনেক নিয়ম ও সূত্রকে সংক্ষিপ্ত আকারেও সহজে প্রকাশ করা যায় যেমন ঃ

(a) $I=\frac{PRT}{100}$, যখন I = সরল সুদ

P = আসল

R = সুদের হার

এবং T = সময় (বৎসর)

(b) $A=l\times b$, যখন A = ক্ষেত্রফল

l = দৈর্ঘ্য

b = প্রস্থ ইত্যাদি

পাটীগণিতে বীজগণিতের প্রয়োগ ঃ

সমস্যা ঃ (১) কোন বিদ্যালয়ের ছাত্র সংখ্যা $12\frac{1}{2}\%$ বৃদ্ধি পাওয়ায় 486 জন ছাত্র হল। পূর্বের ছাত্র সংখ্যা কত ছিল ?

সমাধান ঃ মনে করি পূর্বের ছাত্র সংখ্যা = x

$\therefore$ ছাত্র সংখ্যার বৃদ্ধি = x-র $12\frac{1}{2}\%$

$$=\frac{x\times 25}{2\times 100}=\frac{x}{8}$$

$\therefore$ সর্তানুসারে, পূর্বের ছাত্র সংখ্যা + ছাত্র সংখ্যা বৃদ্ধি = 486 জন।

বা $x+\frac{x}{8}=486$ জন

বা $\frac{9x}{8}=486$ জন

বা $9x=3888$ জন

বা $x=\frac{3888}{9}$ জন = 432 জন

$\therefore$ নির্ণেয় ছাত্র সংখ্যা = 432 জন (উঃ)

[এখানে সমীকরণের প্রয়োগ হয়েছে]

সমস্যা ২। একটা থলিতে একটাকা, আট আনা এবং কুড়ি পয়সাতে মোট 483 টাকা মূল্যের মুদ্রা আছে। মুদ্রাগুলির সংখ্যার অনুপাত 3 : 5 : 7 হলে কোন্ প্রকারের মুদ্রা কয়টি আছে ?

সমাধান ঃ মনে করি, এক টাকা মুদ্রার সংখ্যা $= 3x$;

$\therefore$ টাকার মুদ্রার মূল্য $= 3x$ টাকা

আট আনার মুদ্রার সংখ্যা $= 5x$

$\therefore$ আট আনামুদ্রার মূল্য $= \frac{5x}{2}$ টাকা

কুড়ি পয়সার মুদ্রার সংখ্যা $= 7x$

$\therefore$ কুড়ি পয়সার মুদ্রার মূল্য $= \frac{7x}{5}$ টাকা

$\therefore$ প্রশ্নানুসারে, $3x + \frac{5x}{2} + \frac{7x}{5} = 483$ টাকা

বা, $\frac{30x + 25x + 14x}{10} = 483$ টাকা

বা, $\frac{69x}{10} = 483$ টাকা

বা, $x = \frac{\overset{7}{\cancel{483}} \times 10}{\cancel{69}} = 70$ টাকা

$\therefore$ টাকার মুদ্রার সংখ্যা $= (3 \times 70)$টি $= 210$টি,
আট আনার মুদ্রার সংখ্যা $= (5 \times 70)$টি $= 350$টি,
কুড়ি পয়সার মুদ্রার সংখ্যা $= (7 \times 70)$টি $= 490$টি। } উঃ

[এখানেও বীজগণিতের সমীকরণের প্রয়োগ হয়েছে।]

বীজগণিতে পাটীগণিতের ব্যবহার ঃ

সমস্যা ১। এক ব্যক্তির মাসিক আয় x টাকা ; যার মাসিক আয় উহার অর্ধেক, তার আয় কত ?

সমাধান ঃ x টাকা = এক ব্যক্তির মাসিক আয়,

অপর ব্যক্তির আয় = (x এর $\frac{1}{2}$) টা. $= \frac{x}{2}$ টাকা [সর্তানুসারে]

[এখানে প্রতীক মূলক সম্পর্ক ও চারিনিয়মকে বীজগণিতে ব্যবহার করা হয়েছে।]

পাটীগণিত ও পরিমিতি ঃ পরিমিতি মূলতঃ পাটীগণিতভিত্তিক। কেননা পাটীগণিত-এর চারিনিয়ম এর নীতি ছাড়া পরিমিতির অস্তিত্ব কল্পনাই করা যায়

না। সুতরাং **পাটীগণিত ও পরিমিতির মধ্যে অনুবন্ধ স্থাপন** করা অবশ্যই কর্তব্য। পাটীগণিতের মধ্যে আয়তকার, বর্গাকার প্রভৃতি ক্ষেত্রের ও ঘনকের ক্ষেত্রফল, আয়তন সংক্রান্ত অনেক সমস্যা বিবেচনা করা হয়। তবে এরূপ ঘনক-সংক্রান্ত জটিল ও বহু-ধারাযুক্ত সমস্যাগুলি শিক্ষার্থীদের মানসিক বয়স ও গাণিতিক দক্ষতা কিছুটা বৃদ্ধি পেলে উপস্থাপন করা যায়। তাই **বর্তমান পাঠক্রমে নবম শ্রেণীতে** রাখা হয়েছে আয়তক্ষেত্র, বর্গক্ষেত্র, ত্রিভুজ ও বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় এবং **দশম শ্রেণীতে** রাখা হয়েছে আয়তঘন, লম্ব—বৃত্তাকার শঙ্কু, প্রিজম্, পিরামিড প্রভৃতির তল ও আয়তন নির্ণয় (প্রমাণ ব্যতিরেকে)। পরিমিতির ক্ষেত্রে ঘনবস্তুর মডেল তৈরীর মাধ্যমে শিক্ষাদানেরও নির্দেশ দেওয়া হয়েছে। তাই **মাধ্যমিক স্তরের পরিমিতিকে পাটীগণিতেরই এক সম্প্রসারিত অংশ অথবা জ্যামিতিক ক্ষেত্রে পাটীগণিতের প্রয়োগ বলা** যেতে পারে।

পাটীগণিত ও পরিমিতি

পাটীগণিতে পরিমিতির প্রয়োগ ঃ

সমস্যা ১। একটি আয়তাকার ঘরের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে 12 মিটার ও 5 মিটার। ঘরের পরিসীমা ও কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ পরিমিতি থেকে আমরা জানি,

আয়তাকার ঘরের পরিসীমা $= 2$ (দৈর্ঘ্য + প্রস্থ)

" কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(\text{দৈর্ঘ্য})^2 + (\text{প্রস্থ})^2}$

$\therefore$ ঘরের পরিসীমা $= 2(12+5)$ মি. $= 2 \times 17$ মিঃ $= 34$ মি.

এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25}$ বঃমিঃ $= \sqrt{169}$ বঃমিঃ $= 13$মি.

পরিমিতিতে পাটীগণিতের প্রয়োগ ঃ

সমস্যা ঃ এটি সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য a মি., প্রস্থ b মি. এবং উচ্চতা c মি.। চৌপলটির সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল কত?

সমাধান ঃ পাটীগণিতের আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সূত্রের ভিত্তিতে চৌপলটির 6টি তল হ'ল আয়তাকার।

a দৈর্ঘ্য ও b প্রস্থ বিশিষ্ট 2টি তল

এবং তাদের ক্ষেত্রফল $=$ দৈর্ঘ্য $\times$ প্রস্থ $\times 2 = 2ab$ বর্গ একক।

b দৈর্ঘ্য ও c প্রস্থ বিশিষ্ট 2টি তল

এবং তাদের ক্ষেত্রফল $= 2bc$ বর্গএকক।

c দৈর্ঘ্য এবং a প্রস্থ বিশিষ্ট 2টি তল

এবং তাদের ক্ষেত্রফল $= 2ca$ বর্গএকক

∴ চৌপলটির সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= (2ab + 2bc + 2ca)$ বর্গএকক।

পাটীগণিত ও পরিসংখ্যান ঃ পরিমিতির মত পরিসংখ্যানশাস্ত্রও পাটীগণিতভিত্তিক। পরিসংখ্যানশাস্ত্রে পাটীগণিতের চারি নিয়মের পদ্ধতি, বর্গ প্রভৃতিগুলির প্রয়োগ বেশী দেখা যায় ; সুতরাং এদের মধ্যেও অনুবন্ধ বর্তমান।

পাটীগণিত ও পরিসংখ্যান

পরিসংখ্যান শাস্ত্রে পাটীগণিত ঃ

সমস্যা ঃ 5, 6, 7, 10, 12 এর গাণিতিক গড়, মধ্যমা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ

পরিসংখ্যান শাস্ত্রে গাণিতিক গড়ের সূত্র হল $= \frac{\Sigma x}{N}$.

যখন $\Sigma x =$ নম্বরের সমষ্টি, $N =$ মোট সংখ্যা,

∴ এক্ষেত্রে $\Sigma x = 5 + 6 + 7 + 10 + 12 = 40$

$N = 5.$

∴ গাণিতিক গড় $= \frac{\Sigma x}{N} = \frac{40}{5} = 8$

তেমনি, মধ্যমা নির্ণয়ের ক্ষেত্রে $\frac{N+1}{2}$ তমপদই হ'ল মধ্যমা।

এখানে $\frac{N+1}{2}$ তমপদ মানে $\frac{5+1}{2}$ তম পদ

বা, $\frac{6}{2}$ তম পদ বা 3য় পদ বা 7 হল মধ্যমা।

[এক্ষেত্রে পাটীগণিতের চারিনিয়ম পদ্ধতির প্রয়োগ হয়েছে।]

পাটীগণিতে পরিসংখ্যান ঃ

সমস্যা ঃ এক কৃষক 6টি বলদ কিনল। সেগুলোর দাম যথাক্রমে 172 টাকা, 185 টাকা, 190 টাকা, 224 টাকা, 150 টাকা এবং 159 টাকা। গড়ে প্রতিটি বলদের কত দাম লাগল ?

সমাধান ঃ পরিসংখ্যান শাস্ত্রের গাণিতিক গড় নির্ণয়ের সূত্রের পরিপ্রেক্ষিতে $N = 6$

$\Sigma x = (172 + 185 + 190 + 224 + 150 + 159)$ টাকা $= 1080$ টা.

∴ গাণিতিক গড় $= \frac{1080}{6} = 180$ টাকা

∴ গড়ে প্রতিটি বলদের দাম লাগল 180 টাকা।

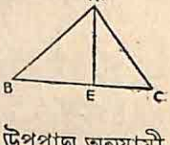
বীজগণিত ও জ্যামিতি : জ্যামিতি ও বীজগণিত উভয় বিষয়েই যুক্তি ও বিচারশক্তির স্থান রয়েছে। বীজগণিতের অধ্যায়ের স্তরবিন্যাসটি মনোবিজ্ঞানসম্মত ও যুক্তি সম্মত হওয়া প্রয়োজন। প্রথম-দিকের অধ্যায়গুলি সহজ, সরল ও চিত্তাকর্ষক হওয়া বাঞ্ছনীয়। বাস্তব সংখ্যা ও সরলরেখার বিভিন্ন অংশের দৈর্ঘ্যের মধ্যে এক অঙ্গাঙ্গী সম্পর্ক রয়েছে। দৈর্ঘ্য সংক্রান্ত অনেক দুরূহ জ্যামিতির সমস্যাগুলি অনেক ক্ষেত্রে বীজগণিতের সাহায্যে সমাধান করা যায়। আবার বাস্তব সংখ্যা সংক্রান্ত অনেক কাজ বীজগণিতের সূত্র ও প্রণালীর সাহায্যে অনেক সহজে সম্পন্ন করা যায়।

বীজগণিত ও জ্যামিতি

বীজগণিতের বিষয়গুলি প্রায়ই অমূর্ত ও সাধারণ। কিন্তু সাধারণ ইউক্লিড জ্যামিতির বিষয়গুলি বিমূর্ত এবং প্রত্যক্ষ অভিজ্ঞতালব্ধ। সুতরাং অমূর্ত বিষয়-গুলি বিভিন্ন চিত্রের সাহায্যে ব্যাখ্যা করা বা অভিজ্ঞতার সঙ্গে মিলিয়ে নেওয়া যায়। এভাবে আমরা বীজগণিতের পূর্ণ বর্গের সূত্রগুলির সত্যতা জ্যামিতির সাহায্যে মিলিয়ে নিতে পারি। তাছাড়া যে কোন মানের বর্গক্ষেত্র নিয়ে কাঁচি দিয়ে কেটে কেটে সূত্রগুলির যাথার্থতা প্রমাণ করতে পারি।

জ্যামিতিতে বীজগণিতের প্রয়োগ :

সমস্যা : ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A থেকে AE, ভুমি BCর উপর লম্ব। $AE^2 = BE.EC$ হলে প্রমাণ কর ত্রিভুজটি সমকোণী।



সমাধান : এখন প্রদত্ত সর্ত অনুসারে

$AB^2 = AE^2 + BE^2 \ldots(1)$ (পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী

এবং $AC^2 = AE^2 + CE^2 \ldots(2)$ (" " ")

(1) ও (2) যুক্ত করলে

$$AB^2 + AC^2 = 2AE^2 + BE^2 + CE^2$$
$$= 2BE.EC + BE^2 + CE^2$$

[$AE^2 = BE.EC$ প্রদত্ত]

$$= (BE + EC)^2 = BC^2$$

$\therefore$ ABC সমকোণী ত্রিভুজ।

[এখানে বীজগণিতের $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ সূত্রটির প্রয়োগ হয়েছে।]

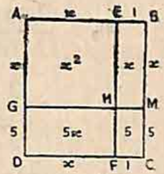
বীজগণিতে জ্যামিতির প্রয়োগ :

সমস্যা : উৎপাদক নির্ণয় কর : x^2+6x+5.

সমাধান : মনে করি ABCD ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল $= x^2+6x+5$

এখানে $AB = x+1$, অর্থাৎ $AE+BE = x+1$

$AD = x+5$, অর্থাৎ $AG+GD = x+5$



$\therefore$ AEGH বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= x^2$

BEHM আয়তক্ষেত্রের „ $= x$

DGHF „ „ $= 5x$

CMHF „ „ $= 5$

} যোগ করলে হয়, x^2+6x+5

এবং $(x+1)(x+5)$ গুণ করলে দাঁড়ায়

$$x^5+x+5x+5 = x^2+x(5+1)+5.$$

অর্থাৎ x^2+6x+5 এর উৎপাদক হ'ল $(x+1)(x+5\ )$.

[এইভাবে আমরা বীজগণিতের সূত্র, উৎপাদক-নির্ণয় প্রভৃতির নিয়মগুলি জ্যামিতিক পদ্ধতিতে সিদ্ধ কিনা মিলিয়ে নিতে পারি।]

বীজগণিত ও ত্রিকোণমিতি

বীজগণিত ও ত্রিকোণমিতি : ত্রিকোণমিতির সৃষ্টিই হ'ল ত্রিভুজের মধ্যে বাজগণিত ও জ্যামিতির প্রয়োগ ক'রে। সুতরাং বীজগণিত ও ত্রিকোণমিতির মধ্যে অনুবন্ধ না করাটাই অস্বাভাবিক।

বীজগণিতে ত্রিকোণমিতির প্রয়োগ :

সমস্যা : যদি $x+y+z = xyz$ হয়, প্রমাণ কর,

$$x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2) = 4xyz$$

সমাধান : মনে করি, $x = \tan A$, $y = \tan B$ এবং $z = \tan C$

প্রদত্ত সর্ত থেকে, $\tan A+\tan B+\tan C = \tan A \tan B \tan C$

বা, $\tan B+\tan C = -\tan A(1-\tan B \tan C)$

বা, $\dfrac{\tan B+\tan C}{1-\tan B+\tan C} = -\tan A$

বা, $\tan(B+C) = \tan(\pi - A)$

বা, $B+C = \pi - A$

বা, $A+B+C = \pi$

এখন, $\tan(2A+2B+2C)=\tan 2\pi=0$

বা, $\dfrac{\tan 2A+\tan 2B+\tan 2C-\tan 2A\tan 2B\tan 2C}{1-\tan 2B\tan 2C-\tan 2C\tan 2A-\tan 2A\tan 2B}=0.$

বা, $\tan 2A+\tan 2B+\tan 2C-\tan 2A\tan 2B\tan 2C=0.$

বা, $\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}+\dfrac{2\tan B}{1-\tan^2 B}+\dfrac{2\tan C}{1-\tan^2 C}$

$=\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}\times\dfrac{2\tan B}{1-\tan^2 B}\times\dfrac{2\tan C}{1-\tan^2 C}.$

বা, $\dfrac{2x}{1-x^2}+\dfrac{2y}{1-y^2}+\dfrac{2z}{1-z^2}=\dfrac{2x}{1-x^2}\cdot\dfrac{2y}{1-y^2}\cdot\dfrac{2z}{1-z^2}.$

বা, $x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2)$

$=4xyz.$

ত্রিকোণমিতিতে বীজগণিতের প্রয়োগ

সমস্যা (১) প্রমাণ কর :—$\sin^4\theta-\cos^4\theta+1=2\sin^2\theta$

বামপক্ষ : $\sin^4\theta-\cos^4\theta+1$

$=(\sin^2\theta)^2+(\cos^2\theta)^2+1$

$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin^2\theta-\cos^2\theta)+1$

$=\sin^2\theta-\cos^2\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta$

$[\because\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1]$

$=2\sin^2\theta=$ ডানপক্ষ

[এখানে $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ এই বীজগণিতের সূত্রটি প্রয়োগ করা হয়েছে]

বীজগণিত ও পরিমিতি :

পাটীগণিত, বীজগণিত ও জ্যামিতির প্রয়োগেই পরিমিতির সৃষ্টি। সুতরাং বীজগণিত ও পরিমিতির অনুবন্ধ রাখা একান্ত প্রয়োজন।

পরিমিতিতে বীজগণিত এর প্রয়োগ : ঘনকের ঘনফল ও পার্শ্বতল সংক্রান্ত সূত্র নির্ণয়ের ক্ষেত্রে দেখা গেছে যে, ঐ সূত্রগুলি প্রতীক জড়িত ও বীজগণিতের সাধারণ ধারণার অনুরূপ।

বীজগণিতওপরিমিতি

সুতরাং বীজগণিতের সাধারণ নিয়মের ধারণা ও প্রতীকের ধারনা না থাকলে পরিমিতির বিষয়গুলি বিবেচনা করা সম্ভব নয়। তাছাড়া শঙ্কু, গোলক বা

পিরামিডের আয়তন বা পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল সংক্রান্ত সূত্রগুলির প্রমাণ বা গাণিতিক প্রতিষ্ঠা বীজগণিতের বিষয়বস্তু।

বীজগণিতের ক্ষেত্রে পরিমিতির প্রয়োগ ঃ

বীজগণিতের সূত্রাবলী বিশেষতঃ ঘনকের ঘনফল নির্ণয় অর্থাৎ $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ সূত্রটি নির্ণয়-এর ক্ষেত্রে পরিমিতির ঘনক ও আয়তনঘন-এর ঘনফল নির্ণয়ের সূত্রটির প্রয়োগ দেখা যায়।

বীজগণিত ও স্থানাঙ্ক জ্যামিতি ঃ

বীজগণিত ও স্থানাঙ্ক জ্যামিতি

বীজগণিত ও জ্যামিতির মিশ্রণে যখন স্থানাঙ্ক জ্যামিতি গড়ে উঠেছে তখন **বীজগণিতের সঙ্গে স্থানাঙ্ক জ্যামিতির অনুবন্ধ স্থাপন বাস্তব ও ফলপ্রদ**।

বীজগণিতে স্থানাঙ্ক জ্যামিতির প্রয়োগ ঃ

বীজগণিতের ক্ষেত্রে লেখচিত্র অঙ্কন ও তার মাধ্যমে সমীকরণ, সহ-সমীকরণ এবং অন্যান্য সমীকরণের সমাধানের সময় স্থানাঙ্কবিন্দু স্থাপন ও নির্ণয়-**স্থানাঙ্ক জ্যামিতির ব্যবহারিক প্রয়োগ**।

স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে বীজগণিতের ব্যবহারিক প্রয়োগ ঃ

দুটি সরল রেখার ছেদ বিন্দুগামী যে কোনো সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়, তিনটি সরলরেখা সমবিন্দু হবার সর্ত নির্ণয় প্রভৃতির ক্ষেত্রে স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে বীজগণিতের সমীকরণ সমাধান নীতিগুলির প্রয়োগ দেখা যায়।

পরিমিতি, জ্যামিতি ও ত্রিকোণমিতি

পরিমিতির মধ্যে আলোচিত বিভিন্ন ঘনকগুলির বিভিন্ন মাত্রা সংক্রান্ত অনেক সমস্যা রয়েছে যা পরোক্ষভাবে **জ্যামিতি ও ত্রিকোণমিতির উপর নির্ভর** করতে হয়। যেমন, সর্বসম ত্রিভুজের ধারণা, কোন ও বাহু সংক্রান্ত, সদৃশ ত্রিভুজ ও বাহুর অনুপাত অথবা কোণানুপাত সূত্র বা নিয়ম-এর ব্যবহার পরিমিতিতে করা হয়। তাই পাটীগণিত, জ্যামিতি ও ত্রিকোণমিতির সাহায্য নিয়ে এই তিনটিকে সমন্বয় করে পরিমিতি শিক্ষাদান করা উচিত।

পরিমিতি, জ্যামিতি ও ত্রিকোণমিতি

উপরোক্ত আলোচনা থেকে দেখা যাচ্ছে যে গণিত-শিক্ষণ তখনই স্বাভাবিক ও ফলপ্রদ হবে, যখন গণিতকে সামগ্রিকভাবে অর্থাৎ গণিতের বিভিন্ন শাখাগুলির মধ্যে সংযোগ স্থাপন করে অনুবন্ধ প্রনালীর মাধ্যমে শিক্ষা দেওয়া যাবে। তাই **মাধ্যমিক স্তরের গণিত শিক্ষণ হবে সামগ্রিক ও অনুবন্ধ প্রণালীভিত্তিক**।

উপসংহার

প্রশ্নাবলী

1. Discuss how far mathematics can be correlated with other subjects in the School. [C. U. B. T. 62]

2. Bring out the links of algebra with arithmetic and geometry and state how far the fusion of the three branches of mathemataties is possible in the teaching of school mathematics. [C. U. B. T. 55, 60, '68]

3. Discuss the correlation of mathematics with other subjects of the curriculum and with environment. [C. U. B. T. 65]

4. Indicate with suitable examples, the relations of mensuration with arithmetic, algebra, geometry and trigonometry [C. U. B. T. 69]

5. Give yor suggestions for the correlation of mathematics internally among its different branches and externally with other subjects of th School curriculum. What are the advantages of such Correlation. [B. U. B. T. 68]

6. Write notes on :

(a) Correlation of Algebra with Geometry [C. U. B. T. 72]

(b) Algebra in geometry and geometry in algebra. [C. U. B. T. 66] [B. U. B. T. 67]

———

॥ অষ্টম অধ্যায় ॥

গণিত শিক্ষণের মূল্যায়ণ
(Evaluation of Teaching Mathematics)

পরীক্ষা ও মূল্যায়ণ (Examination and Evaluation):

শিক্ষণ ও শিক্ষালাভ—এই দুই প্রক্রিয়ার মাধ্যমেই শিক্ষাকার্য্য সম্পাদিত হয়। **অভিজ্ঞতা অর্জন করা ও অর্জিত অভিজ্ঞতা ব্যবহারের দক্ষতা** সৃষ্টি করাই শিক্ষার অন্যতম লক্ষ্য। সুতরাং শিক্ষার ফলশ্রুতি বিচার করা শিক্ষাপ্রক্রিয়ার এক অবিচ্ছেদ্য অংশ। **শিক্ষাদানের বিষয়বস্তু, পদ্ধতি ও সার্থকতা বিচারই পরীক্ষা ব্যবস্থার মূল কথা**। শিক্ষার্থীর ব্যক্তিগত জ্ঞানের পরিমাপ সাধনই এর উদ্দেশ্য। এই পরীক্ষা পদ্ধতি একান্তভাবে ব্যক্তি-নির্ভর হওয়ার ফলে এর মাধ্যমে শিক্ষার্থীর অগ্রগতির আর কোনদিকের প্রত্যক্ষ পরিমাপ সম্ভব নয়। **আধুনিক শিক্ষার লক্ষ্যই হ'ল** শিক্ষার্থীর ব্যক্তিতার সর্বাঙ্গীন বিকাশ এবং তা শিক্ষার্থীর পরিপূর্ণ মূল্যায়ণের মাধ্যমেই সম্ভব। আধুনিক মনোবিজ্ঞানসম্মত **শিক্ষায় ব্যক্তিগত বৈষম্যের ওপর বিশেষ গুরুত্ব** আরোপ করা হয়। এই ব্যক্তিগত বৈষম্যের পটভূমিকায় প্রতিটি শিক্ষার্থীর বিভিন্নমুখী বৈশিষ্ট্যের সঠিক পরিচালনা সম্ভবপর হয় না। এই উদ্দেশ্য পূরণের জন্য নানা ধরণের **উদ্দেশ্যমুখী প্রমাণসিদ্ধ ও মান-সম্মত বিজ্ঞানধর্মী অভীক্ষার প্রচলন** ঘটেছে। এই সমস্ত নৈর্ব্যক্তিক অভীক্ষার সাহায্যে একদিকে শিক্ষার্থীর সর্বতোমুখী ব্যক্তিতার স্বরূপ যেমন নির্ধারিত হয় তেমনি আবার অন্যদিকে তার ভবিষ্যৎ সম্ভাবনার কথা বিচার ক'রে পথনির্দেশ সম্ভব হয়।

পরীক্ষা ও মূল্যায়ণের মধ্যে পার্থক্য

শিক্ষার্থীর শিক্ষাগত অগ্রগতি, সমস্যা ও সমস্যা-সমাধানের উপযোগী বিজ্ঞান-সম্মত অভীক্ষার প্রয়োগ সাধন ঘটিয়ে শিক্ষা ও জীবন বিকাশের মধ্যে পরিপূর্ণ সামঞ্জস্য বিধানের প্রক্রিয়াকে বলা হয় মূল্যায়ণ (Evaluation)। পরীক্ষা ও মূল্যায়ণ-দুটি কথাকে আমরা ভিন্ন ভিন্ন ভাবে ব্যবহার করলেও দুটি কথার মধ্য দিয়ে আমরা যা বোঝাতে চাই তা হচ্ছে শিক্ষার্থীর শিক্ষাগত ও মানসিক পরিমাপ। কিন্তু পরীক্ষা ও মূল্যায়ণ সমার্থক নয়। নিছক বুদ্ধিগত ও তত্ত্বমূলক জ্ঞানের সীমাবদ্ধ সফলতা—ব্যর্থতার

যাচাই ঘটে প্রচলিত পরীক্ষার মাধ্যমে। **মূল্যায়ণ** (Evaluation) **বলতে ব্যাপক অর্থে শিক্ষার্থীর সামগ্রিক বিকাশের পরিমাণ সাধনকেই বোঝায়।** প্রচলিত পরীক্ষা ও আধুনিক মূল্যায়ণের মধ্যে মৌলিক কোন প্রভেদ না থাকলেও পরিমাপ সাধনের উদ্দেশ্য, ক্ষেত্র ও প্রয়োগ পদ্ধতির দিক থেকে পার্থক্যের অবকাশ থাকে।

মূল্যায়ণের উপাদান (Factors of Evaluation) :

মূল্যায়ণের **প্রথম ধাপ বা উপাদান** হ'ল **উদ্দেশ্য** (Aim) **নির্ণয়**। আমাদের প্রতিটি কাজেই নির্দিষ্ট লক্ষ্য বা উদ্দেশ্য রয়েছে। তাই কোন কাজ করার আগেই তার উদ্দেশ্য নির্দিষ্টভাবে নিরূপিত হওয়া প্রয়োজন। উদ্দেশ্যের পরিপ্রেক্ষিতেই কাজের সফলতা বা ব্যর্থতা বিচার করা যায়। **দ্বিতীয় স্তর বা উপাদান হ'ল শিক্ষামূলক অভিজ্ঞতা** (Educational Experience) **বা কার্য্যাবলী নির্ধারণ।** এই অভিজ্ঞতা বা কার্য্যাবলী এমনভাবে নির্ধারিত করতে হবে যার মাধ্যমে শিক্ষার্থী সহজেই উদ্দেশ্যকে কার্য্যে রূপায়িত করতে পারে। **তৃতীয় মাধ্যম বা উপাদান হ'ল পরিমাপক যন্ত্রের** (Techniques of measurement) **উদ্ভাবন। সার্থক পরিমাপ যন্ত্রের বা অভীক্ষার বৈশিষ্ট্যগুলি** হ'ল (১) **নির্ভরযোগ্যতা** (Reliability) (২) **যথার্থতা** (Validity) (৩) **নৈর্ব্যক্তিকতা** (Objectvity) (৪) **প্রয়োগ-ধর্মিতা** (Administrability) (৫) **প্রয়োজনীয়তা** (Utility)। **চতুর্থ স্তর বা উপাদান হ'ল উদ্দেশ্যের পরিপ্রেক্ষিতে কার্য্যাবলীর তুলনা করা।** এই স্তরে দেখতে হবে শিক্ষার্থী উদ্দেশ্যকে কতদূর কার্য্যে রূপায়িত করতে পেরেছে।

মূল্যায়নের বিভিন্ন স্তর

মূল্যায়নের উদ্দেশ্য (Aims of Evaluation) : মূল্যায়ন একটি পরিমাপক যন্ত্র। তাই **মূল্যায়নের উদ্দেশ্য** হ'ল (১) প্রবণতার প্রশংসা ও দুর্বলতার কারণ নির্ণয়-এর মাধ্যমে শিক্ষণ ও শিক্ষালাভের ফলপ্রদ ও সুচিন্তিত নির্দেশনার সুযোগদান, (২) শিক্ষাপদ্ধতির মূল্যায়ন এবং (৩) শিক্ষাগত উদ্দেশ্য রূপায়ণের পরিমাপ এবং শিক্ষার্থীর অগ্রগতির সুযোগদান। সার্থক ও সন্তোষজনক মূল্যায়নের প্রধান বৈশিষ্ট্যই হ'ল **ধারাবাহিকতা।** সুদক্ষ নির্দেশনার জন্য প্রয়োজন শিক্ষার্থীর **অগ্রগতির ধারাবাহিক পর্য্যবেক্ষণ, দুর্বলতার কারণ নির্ণয়** এবং **ভবিষ্যৎ-সাফল্য সম্ভাবনা নির্ধারণ।**

মূল্যায়নের উদ্দেশ্য

মূল্যায়নঅভীক্ষার প্রকারভেদ (Types of Evaluative Techniques)ঃ পরিমাপক যন্ত্রের বা মূল্যায়নের উদ্দেশ্যের পরিপ্রেক্ষিতে অভীক্ষাগুলিকে ভাগ করা হয়েছে ঃ

মূল্যায়ন অভীক্ষার প্রকারভেদ

(১) **ভবিষ্যৎ সম্ভাবনা নির্দেশক অভীক্ষা** (Prognostic Tests) ঃ এই অভীক্ষার মাধ্যমে বিশেষ কোন ক্ষেত্রে বা কাজে শিক্ষার্থীর ভবিষ্যৎ সম্ভাবনার ইঙ্গিত দেওয়া যায়। যে কোন ক্ষেত্রে বা কাজে সাফল্য-লাভ করতে গেলে কিছু দক্ষতার প্রয়োজন। Prognostic Tests শিক্ষার্থীর ঐ দক্ষতারই পরিমাপ করতে পারে। গণিতের ক্ষেত্রে জ্যামিতি ও বীজগণিতে এই অভীক্ষার প্রচলন রয়েছে।

(২) **দুর্বলতার কারণ-নির্ণায়ক অভীক্ষা** (Diagnostic Tests) ঃ এই অভীক্ষার মাধ্যমে শিক্ষার্থীর কোন বিষয়ের প্রতি দুর্বলতার কারণ নির্ণয়, বিশ্লেষণ প্রভৃতি সম্ভব। তাছাড়া এই অভীক্ষার মাধ্যমে শ্রেণীকক্ষে কোন বিষয় উপস্থাপন করার আগে শিক্ষার্থীর পূর্বজ্ঞান যাচাই করা যায়। পাটীগণিতের চারনিয়মের ব্যবহার সম্পর্কীয় বিভিন্ন দুর্বলতার কারণ নিধারণ করা হয়।

(৩) **তদারকী অভীক্ষা** (Survey Test) ঃ এই অভীক্ষার পরিধি ব্যাপক। এই অভীক্ষা একটি নির্দিষ্ট স্তর বা শ্রেণীর নির্দেশনাকে ব্যাপকভাবে পরিমাপ করে। NCERT গণিতের ক্ষেত্রে সারাভারত গণিতশিক্ষার পর্যবেক্ষণ করার জন্য একটি তদারকী অভীক্ষা প্রস্তুত করেছেন।

(৪) **শিক্ষাগত অভীক্ষা** (Educational Acheivement Test) ঃ শিক্ষার্থীর দক্ষতা, ধারণা, জ্ঞান পরিমাপের জন্য বিদ্যালয়ে যে পরীক্ষা প্রচলিত তারই নাম শিক্ষাগত অভীক্ষা।

অভীক্ষার শ্রেণীবিভাগ (Classification of Tests) ঃ কৌশলের দিক থেকে মূল্যায়ন অভীক্ষাগুলি হ'ল ঃ

মূল্যায়ন অভীক্ষার শ্রেণীবিভাগ

(১) **আদর্শায়িত অভীক্ষা** (Standardised Tests) ঃ এই অভীক্ষার বৈশিষ্ট্যই হ'ল নির্দিষ্ট মান বা Norm-এর পরিপ্রেক্ষিতে তুলনীয়তা ও প্রয়োগধর্মিতা। যথার্থতা ও নির্ভরযোগ্যতার দিক থেকেও এরা নৈর্ব্যক্তিক। তবে গণিতের ক্ষেত্রে আমাদের দেশে এই ধরণের অভীক্ষার অভাব রয়েছে।

(২) **সাধারণ শিক্ষাগত অভীক্ষা** (General Educational Təst) ঃ এই অভীক্ষাগুলি শ্রেণীকক্ষের নির্দেশনার বিচার করার জন্য গণিতশিক্ষক নিজেই

প্রস্তুত করেন। সাধারণভাবে গণিতশিক্ষার ক্ষেত্রে বিদ্যালয়ে যে পরীক্ষাগুলি প্রচলিত রয়েছে সেগুলি হ'ল (ক) **মৌখিক পরীক্ষা** (Oral Test), (খ) **লিখিত পরীক্ষা** (গতানুগতিক ও নৈর্ব্যক্তিক) (Written Test—Traditional and objective)।

(ক) **মৌখিক পরীক্ষা ঃ** যথাযথ মূল্যায়নের জন্য শিক্ষার্থীদের মৌখিক পরীক্ষাও গ্রহণ করা যায়। তবে মৌখিক পরীক্ষায় সময়ের ওপর গুরুত্ব না দিয়ে যথাযথ পরিমাপ ও মূল্যায়নের ওপর গুরুত্ব দিতে হবে। গণিতের ক্ষেত্রে মৌখিক পরীক্ষার মাধ্যমে মানসিক হিসাব করার দক্ষতা, প্রত্যক্ষণ (perception) সম্পর্কীয় আগ্রহ, যুক্তি ও বিচারক্ষমতা প্রভৃতির পরিমাপ সম্ভব।

(খ) **লিখিত পরীক্ষা ঃ** শিক্ষার্থীদের অর্জিতজ্ঞান পরিমাপ করার জন্য বছরে সাপ্তাহিক, মাসিক, ষান্মাসিক ও বাৎসরিক পরীক্ষা গ্রহণ করা হয়। এই পরীক্ষা হওয়া উচিত **গতানুগতিক ও নৈর্ব্যক্তিক অভীক্ষার সংমিশ্রণে।** প্রতিটি পরীক্ষায় প্রশ্নপত্রে অন্ততঃ শতকরা ৮০ ভাগ থাকবে গতানুগতিক অভীক্ষা এবং বাকী শতকরা ২০ ভাগ হবে নৈর্ব্যক্তিক অভীক্ষা।

একটি লিখিত পরীক্ষার নমুনা

গাণিতিক দক্ষতা পরিমাপ করার একটি লিখিত পরীক্ষার প্রশ্ন নীচে দেওয়া হ'ল। দেখলেই বোঝা যাবে যে **লিখিত পরীক্ষা কি ধরণের হওয়া উচিত ঃ**

১। **গুণফলে দশমিক বিন্দু বসাও ঃ**

(ক) $72{\cdot}314 \times {\cdot}32 = 2314048$

(খ) ${\cdot}00731 \times 5{\cdot}2 = 380J2$

২। **ভাগফল কত ?**

$16 \div 0{\cdot}08 =$

৩। **গুণফলে ও ভাগফলে 'একক' বসাও ঃ**

(ক) 5 কি.মি· × 3 কি.মি. = 20...

(খ) 7 টাকা × 5 = 35...

(গ) 8 × 6 ব. মি. = 48...

(ঘ) 147 ঘঃ মিঃ ÷ 7 মি. = 21...

৪। **প্রথম উদাহরণ দেখে পরেরগুলি লেখ :**

	ভগ্নাংশ		দশমিক		শতকরা
	$\frac{1}{2}$	=	0·5	=	50%
(ক)	$\frac{1}{4}$	=		=	
(খ)	$\frac{1}{10}$	=		=	
(গ)		=	0·8	=	
(ঘ)		=	0·2	=	
(ঙ)		=		=	40%
(চ)		=		=	7%

৫। **নিম্নের রাশিগুলির বর্গমূল কয় সংখ্যাবিশিষ্ট ? উদাহরণ দেখে লেখ :**

441-এর বর্গমূল = (21) দুই সংখ্যাবিশিষ্ট।

(ক) 6241 এর বর্গমূল =

(খ) 1500625 ,, =

(গ) 57592921 ,, =

৬। **সরল কর :** (সংক্ষিপ্ত উপায়ে) :

$999\frac{98}{99} \times 99 =$

৭। নিম্নের সুদ নির্ণয়ের সূত্রটির সাহায্যে প্রদত্ত অঙ্কটি **সমাধান কর :**

$$I = \frac{P \times T \times R}{100}$$

যখন I = সরলসুদ, P = আসল, R = সুদের হার, T = সময়।

অঙ্ক : বার্ষিক শতকরা 5 টাকা হারে 250 টাকার 3 বৎসরের সুদ কত ?

৮। **শূন্যস্থান পূর্ণ কর :** (শ্রেণীর সম্পর্ক দেখে):

(ক) 6, 9, 12, —, 18, 21,

(খ) 2, 4, 8, 16. —, 64,

(গ) 7, 16, 19, 28, 31, —, —, 52,

(ঘ) $\frac{8}{16}$, $\frac{8}{8}$. $\frac{8}{4}$, $\frac{8}{2}$, 3, —, —,

(ঙ) 2, 6, 12, 20, —, 42,

৯। **উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :**

(ক) $xy + xz$

(খ) $a^2 - 8a + 15$

(খ) $6a^2 - 11a - 10$

(ঘ) $a^2 + 2a - 360$

(ঘ) $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 + 2ab - 2cd.$

১০। **সমাধান কর :**

(a) $18x = 54$

(b) $\frac{x}{2} + 5 = \frac{x}{3} + 7$

১১। **ঠিক উত্তরটিতে দাগ দাও :**

15-এর $\frac{4}{5}$ এর সংগে কত যোগ করলে 15 হয় ?

উঃ 4, 7, 6, 15.

১২। **ডানদিকের সংগে বামদিকে মিল করে লেখ :**

$\cdot 5 \times 4$	$2\pi r$
$60 \div 3$	$\frac{1}{5}$
$\frac{1}{4} \div \frac{5}{4}$	$90°$
1 সমকোণ	2
বৃত্তের পরিধি	20
	πr^2

১৩। **সত্য-মিথ্যা নির্ধারণ কর :**

(ক) কোন নির্দিষ্ট প্রতিফলন রেখার জন্য কোন একটি বিন্দুর কেবল মাত্র একটিই প্রতিবিম্ব পাওয়া যায়। সত্য/মিথ্যা

(খ) বস্তু দূরত্ব ও প্রতিবিম্ব দূরত্ব পরস্পর অসমান। সত্য/মিথ্যা

(গ) সমরেখ বিন্দুগুলির প্রতিবিম্ব বিন্দুগুলিও সমরেখ। সত্য/মিথ্যা

১৪। **উত্তর দাও :**

(ক) একটি লাইনে 15টি ছেলে দাঁড়িয়ে আছে। বাঁদিক থেকে যার স্থান পঞ্চম, ডানদিক থেকে তার স্থান কত ?

(খ) ফুটবল মাঠ পুকুরের 1 মাইল পূর্ব্বদিকে ; ইস্কুলবাড়ী পুকুরের 1 মাইল উত্তরদিকে ; পোষ্ট অফিস ইস্কুলের 1 মাইল পূর্বে। পোষ্ট অফিস ফুটবল মাঠের কোন দিকে ?

১৫। **সমস্যা**ঃ আমরা একদিন মোটরে চড়ে 4 মাইল পরে স্টেশনে গেলাম এবং সেখান থেকে ট্রেনে ক'রে ঘণ্টায় 40 মাইল বেগে 3 ঘণ্টা কাটালাম। সারাদিনে আমরা কতটা গাড়ীতে ঘুরলাম।

(ক) সমস্যাটীতে কী সর্ত প্রদত্ত ?

(খ) কি চাওয়া হয়েছে ?

(গ) কি ভাবে করতে হবে ?

(ঘ) নিম্নের কোনটী সঠিক সমাধান পদ্ধতি ?

$$\left[\begin{array}{l}40+4=44\\44\times3=132\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}40\times3\ =120\\120+4=124\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}40\times3=120\\4\times4\ =16\\120+16=136\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}4+3=7\\40\times7=280.\end{array}\right.$$

গণিতে মূল্যায়ন (Evaluation in Mathematics): উপরের প্রশ্নপত্রে লক্ষ্য করলে দেখা যাবে যে **প্রত্যেকটি প্রশ্নের জন্য নির্দিষ্ট উদ্দেশ্য রয়েছে**। মনে রাখতে হবে গণিত শিক্ষার মূল লক্ষ্য হ'ল **দক্ষতা ও ক্ষমতা উভয়ই অর্জন করা। দক্ষতা বলতে দ্রুততা ও যথার্থতা উভয়কেই বোঝায়।** আবার **ক্ষমতা হল কঠিন ও বুদ্ধিভিত্তিক সমস্যার সমাধান করার শক্তি**। সুতরাং গণিতশিক্ষার ক্ষেত্রে যথার্থ মূল্যায়ন করতে হ'লে অভীক্ষা বা প্রশ্নপত্র এমনভাবে তৈরী করতে হবে. যেন তার মাধ্যমে **যুক্তি, বিচার, বিশ্লেষণ, প্রতীকমূলক ভাষার ব্যবহার, বিভিন্ন দক্ষতা, সমস্যাসমাধানের ক্ষমতা. সাধারণীকরণ ও বিশেষীকরণের ক্ষমতা ও অভ্যাস প্রভৃতির পরিমাপ করা যায়।** মাঝে মাঝে দুর্বলতা-**নির্ণায়ক ও ভবিষ্য-সম্ভাবনা নির্দেশক পরীক্ষা করা ও উচি**ত। গণিতের দক্ষতা শিক্ষার্থীর সাধারণ বুদ্ধির ওপরেও নির্ভরশীল। কখনও কখনও নিম্নবুদ্ধিসম্পন্ন শিক্ষার্থীরা গণিতে দক্ষ হয় না। তাই **প্রয়োজন হলে বুদ্ধিমাপার জন্যও গণিতের মূল্যায়নের ক্ষেত্রে বুদ্ধির অভীক্ষাও প্রয়োগ করা উচিত।**

গণিতের ক্ষেত্রে মূল্যায়ন

মূল্যায়ন শিক্ষার্থীদের শিক্ষাগত ও মানসিক বিকাশের যথাযথ ও বৈজ্ঞানিক পরিমাপ। তাই **মূল্যায়নের তথ্যগুলি যথাযথভাবে সংগ্রহ, বিশ্লেষণ ও সংরক্ষণ করতে হবে**। এ ব্যাপারে চরম গোপনীয়তা ও নিরপেক্ষতা অবলম্বন করতে হবে। মূল্যায়ণের মান নির্ধারণের সময় A, B. C, D, E, প্রভৃতি Five Point Scale ব্যবহার করা

উপসংহার

ভালো। এ ব্যাপারে সমস্ত শিক্ষকের সক্রিয় ও আন্তরিক সহযোগিতা একান্ত প্রয়োজন। শিক্ষাক্ষেত্রে যথাযথ মূল্যায়ন করতে গেলে প্রচলিত শিক্ষাব্যবস্থা ও পরীক্ষা-ব্যবস্থার আমূল সংস্কার প্রয়োজন।

প্রশ্নাবলী

1. "Evaluation is an integral part of the total educational process," Explain this with special reference to mathematical instruction and discuss, how the acheivement of your pupils in mathematics could be effectively evaluated,
[C. U. B. T. '66]

2. What is meant by evalution in education ? State how would you proceed to evalute the mathematical ability and acheivement of your pupils, [C. U. B. T. ' 69]

———

॥ নবম অধ্যায় ॥

নতুন পাঠক্রম ও গণিত শিক্ষা
(New Curriculum and Teaching of Mathematics)

নতুন পাঠক্রম ও গণিত শিক্ষা (New Curriculum and Teaching of mathematics : গণিত এক **গতিশীল বিষয়**। তার প্রমাণ গণিতের দ্রুত অগ্রগতি। এই অগ্রগতিতে বর্তমান শতাব্দী বিশেষ গুরুত্ব অর্জন করেছে। কারণ, বর্তমান গাণিতিক প্রত্যয়গুলির বেশীর ভাগই আবিস্কৃত হয়েছে এই শতাব্দীতে। গণিতশাস্ত্র শুধু নিজস্ব ক্ষেত্রেই উন্নতি লাভ করেনি, অন্যান্য শাস্ত্রকেও যথেষ্ট প্রভাবিত করেছে। পূর্বে সাধারণতঃ প্রাকৃতিক বিজ্ঞান ও প্রযুক্তি বিদ্যায় এর প্রয়োগ ছিল সীমিত। কিন্তু **বর্তমানে এর প্রয়োগক্ষেত্র অনেক বেশী বিস্তৃতি লাভ করেছে**। অর্থনীতি, ব্যবসা-বাণিজ্য, জীববিদ্যা, মনস্তত্ব প্রভৃতি বিষয় গণিতের সাহচর্য্যে বিশেষ সমৃদ্ধিলাভ করেছে। প্রকৃতপক্ষে, সামাজিক ও ব্যক্তিগত জীবনে আজকাল গণিতের ব্যবহার একান্তই অপরিহার্য্য। যে কোন উন্নয়নশীল সমাজে গণিতের পাঠক্রম স্থির করার সময় উপরোক্ত বিষয়গুলি মনে রাখা একান্ত প্রয়োজন। **গণিত শাস্ত্রের নিজস্ব ক্ষেত্রে অগ্রগতি ও সামাজিক প্রয়োজনে এর প্রয়োগ—এই দুটির সংগতি বিধান করাই গণিত শিক্ষার লক্ষ্য হওয়া উচিত**। পৃথিবীর বিভিন্ন দেশে গণিতের পাঠক্রম নিয়ে বহু গবেষণা হয়েছে ও হচ্ছে। যার ফলে পৃথিবীর অধিকাংশ দেশেই গণিতের পাঠক্রমে ঘটেছে বৈপ্লবিক পরিবর্তন। আমাদের দেশেও কয়েক বছর ধরে এ নিয়ে বহু আলোচনা হয়েছে। NCERT র উদ্যোগে কয়েকটি পাঠচক্র গবেষণার ভিত্তিতে একটা পাঠক্রম স্থিরীকৃত ক'রে সেই পাঠক্রম অনুসারে কয়েকটি আদর্শ পুস্তকও পরীক্ষামূলকভাবে প্রকাশ করেছেন।

নতুন গণিত পাঠক্রমের আবির্ভাব

নতুন গণিত শিক্ষার উদ্দেশ্য : (Aims for Teaching New Mathematics)

১৯৭৪ সাল থেকে আমাদের দেশে গণিত শিক্ষার ক্ষেত্রে যে নতুন পাঠক্রম

চালু করা হয়েছে তাতে গণিত শিক্ষণের চারটে উদ্দেশ্যের কথা বলা হয়েছে :

নতুন পাঠক্রম ও গণিত শিক্ষণের উদ্দেশ্য

(১) **বিচার শক্তির উন্নয়ন** (২) **বিদ্যালয়, পারিবারিক ও সামাজিক জীবনে উদ্ভূত সংখ্যাসম্পর্কীয় ও জ্যামিতিক সমস্যার দ্রুত সমাধান** (৩) **সঠিকভাবে প্রকাশ করার ও কর্মসম্পাদনের ক্ষমতার অনুশীলনে উৎসাহদান এবং** (৪) **মহাজাগতিক অভিযানে সফল গণিতের প্রতি অনুরাগ সৃষ্টি।**

নতুন পাঠক্রমের রূপায়ণ (Realisation of New Curriculum in Mathematics) :

গণিতের বিভিন্ন শাখার যে পাঠক্রম নির্ধারিত হয়েছে তাতে উপরোক্ত উদ্দেশ্যগুলি সঠিকভাবে প্রতিফলিত হয়েছে কিনা তা সম্পর্কে মতভেদ থাকলেও নতুন পাঠক্রমকে রূপায়িত করার চেষ্টা করতে হবে ঐ উদ্দেশ্যের পরিপ্রেক্ষিতেই। গণিত শিক্ষাদানের সময় যে জিনিষগুলি মনে রাখা একান্ত প্রয়োজন সেগুলি হ'ল :

নতুন পাঠক্রম ও সঠিক রূপায়ন

(১) **যান্ত্রিকতার বদলে বোধগম্যতার ওপর গুরুত্ব আরোপ করতে হবে।** "Learning by doing" এই নীতি অবলম্বন করে শিক্ষার্থীর স্বাভাবিক জ্ঞানকে কাজে লাগাতে হবে। Activity বা **সক্রিয়তার ওপর বিশেষভাবে জোর দিতে হবে।**

(২) সমস্যাগুলি হবে **সরল বাস্তবানুগ ও স্থানীয় পরিবেশভিত্তিক।** তাই নির্দিষ্ট পুস্তকের ওপর নির্ভরশীলতা কমাতে হবে। তাহলে শিক্ষার্থী ধীরে ধীরে একই জাতীয় কতকগুলি দৃষ্টান্ত থেকে ঐ জাতীয় সমস্ত শ্রেণীর প্রকৃতি নির্ণয় করবে এবং পৌছতে পারবে **মূর্ত থেকে বিমূর্ত ধারনায়।**

নতুন পাঠক্রম ও তার শিক্ষাপদ্ধতি (New Curriculum and its methods of Teaching)

গণিতের নতুন পাঠক্রমে যে কয়টি শাখা অন্তর্ভুক্ত করা হয়েছে সেগুলি হ'ল **পাটীগণিত, বীজগণিত, জ্যামিতি, পরিমিতি ও ত্রিকোণমিতি।**

পাটীগণিত, বীজগণিত, ও পরিমিতির ক্ষেত্রে **ব্যবহারিক প্রয়োজনীয়তা ও বোধগম্যতার** দিকে লক্ষ্য রেখেই কিছু কিছু অংশ গতানুগতিক গণিত থেকে বর্জন করা হয়েছে। যেমন, পাটীগণিত থেকে সরলীকরণ ও আবৃত্ত দশমিক বাদ দেওয়া হয়েছে ; ক্ষেত্রফল ও ঘনফল নির্ণয়কে পাটীগণিত থেকে

পরিমিতির মধ্যে অন্তর্ভুক্ত করা হয়েছে। শতকরা হিসাব, লাভ-ক্ষতি, সময় কার্য্য, সময়-দূরত্ব, সরলসুদকষা, আয়কর প্রভৃতি বিষয়ক সমস্যাগুলি ঐকিক নিয়মের প্রত্যক্ষ প্রয়োগ হিসাবে দেখা হয়েছে। **এদের সমস্যাগুলিকে হতে হবে বাস্তবানুগ ও স্থানীয় অভিজ্ঞতা এবং পরিবেশভিত্তিক।** শিক্ষার অন্যতম উদ্দেশ্য হ'ল শিশুমনে জাতীয় ভাবধারা ও সামাজিক চেতনার উন্মেষ-সাধন। গাণিতিক সমস্যাগুলি এই উদ্দেশ্য সাধনের সহায়ক। ব্যক্তিগত সমস্যার বদলে যৌথপ্রথা (সমবায়প্রথা, খামারপ্রথা) সম্পর্কীয় সমস্যাগুলির ওপর গুরুত্ব আরোপ করতে হবে। অনুপাতের প্রশ্নে ভেজাল সম্পর্কীয় সমস্যা বর্জন করতে হবে। এ সব ক্ষেত্রে পদার্থবিদ্যা বা রসায়ণবিদ্যায় সহজ সমস্যার ব্যবহার শেখানো যেতে পারে। তার ফলে অন্যান্য শাস্ত্রে গণিতের ব্যবহার সম্পর্কে কিছু ধারণাও জন্মাতে পারে।

নতুন পাঠক্রম ও শিক্ষাপদ্ধতি

যান্ত্রিক উপায়ে সূত্র মুখস্থ করার বদলে মডেলের সাহায্যে Activity বা **সক্রিয়তার মাধ্যমে পরিমিতির সূত্রগুলির সত্যতা নিরূপন** করতে হবে।

ত্রিকোনমিতির যে অংশটি পাঠক্রমে অন্তর্ভুক্ত করা হয়েছে তার ব্যবহারিক প্রয়োজনীয়তাই বেশী। রাশিবিজ্ঞান বর্জন করা হ'লেও বর্তমান রাশিবিজ্ঞান ভিত্তিক যুগের দিকে চেয়ে গড়ের সমস্যাগুলি এবং বীজগণিতের প্রদত্ত তথ্যসমূহের উপস্থাপনে লেখচিত্রের অবতারনা করা হয়েছে।

জ্যামিতির ক্ষেত্রে এসেছে বৈপ্লবিক পরিবর্তন। প্রচলিত পাঠক্রমে **"পারিপার্শ্বিক পার্থিব বস্তু থেকে জ্যামিতিক বস্তুর ধারনায় আসা"** দিয়ে জ্যামিতি শিক্ষা সুরু হয়েছে। তারপর পরিমাপের সাহায্যে কতকগুলি সত্যের প্রতিপাদন করা হয়েছে। পরিশেষে কতকগুলি পথকে স্বতঃসিদ্ধ হিসাবে ধরে নিয়ে যুক্তির সাহায্যে অন্যান্য জ্যামিতিক সত্যতা প্রতিষ্ঠা করা হয়েছে।

জ্যামিতিকে দেখা হয়েছে **পার্থিব জগতের মডেল** হিসাবে। এই পার্থিব বস্তু থেকে আমরা সহজেই জ্যামিতিক ধারনার দিকে অগ্রসর হতে পারি। যেমন একটি বিন্দুকে একটি ক্ষুদ্র আকারের ফুট্‌কি বা Dot-এর বিমূর্ত রূপ হিসাবে চিন্তা করা যায়। তেমনি রেখাকে একটি টান করা অসীম পর্য্যন্ত বিস্তৃত তারের বিমূর্তরূপ বা একটি তলকে টেবিলের উপরিভাগ বা ব্ল্যাকবোর্ডের উপরিভাগ বা দেওয়ালের (অসীম পর্য্যন্ত বিস্তৃত) বিমূর্তরূপ হিসাবে কল্পনা করা যায়। কিন্তু এই জ্যামিতিক ধারণাগুলির কোন সংজ্ঞা দেওয়া সম্ভব কি-

না ? এই বস্তুগুলির সংজ্ঞা দিতে গিয়ে এমন কতকগুলি শব্দের ব্যবহার করতে হয় যেগুলির সংজ্ঞা নিরূপণ করতে গেলে আবার ঐসব জ্যামিতিক বস্তুতেই ফিরে আসতে হয়। এই অসংগতির জন্যই এগুলির কোন সংজ্ঞা দেওয়া হয় না। এগুলোকে "Undifined term" হিসাবে ধরে নেওয়া হয়েছে। নতুন পাঠক্রমে রেখার ক্ষেত্রে বলা হয়েছে "Segment বা Segment of a line"। রেখাকে আমরা অসীম পর্য্যন্ত বিস্তৃত মনে করি। সেখানে সীমাবদ্ধ রেখাকে রেখা বলা যুক্তিযুক্ত হবে না। তাই তাকে রেখাংশ বলা হয়েছে।

জ্যামিতির পরবর্তী অংশে কার্য্য কলাপের মাধ্যমে সত্যতা নিরূপণের ওপর গুরুত্ব আরোপ করা হয়েছে।

Euclid Geometry—যার ওপর ভিত্তি করে নতুন পাঠক্রম গড়ে উঠেছে—তাতে জ্যামিতিক সত্যগুলিকে প্রতিষ্ঠা করা হয়েছে কতকগুলি স্বতঃসিদ্ধ ও সাধারণ ধারণার ওপর ভিত্তি করে। জ্যামিতিক চিত্রের গোড়ার কথাই হ'ল বিন্দু, রেখা ও তল। এদের মধ্যে পারস্পরিক সম্পর্ক জ্যামিতিক সত্য প্রমানে অপরিহার্য্য। এগুলোকে স্বতঃসিদ্ধ হিসাবে ধরে নেওয়া যেতে পারে।

কোন সত্য প্রতিষ্ঠার ক্ষেত্রে **সর্বসমতার** ধারণার বিশেষ প্রয়োজন। Euclid Geometry-র একটি মূল প্রত্যয় যার ওপর ভিত্তি ক'রে Euclid Geometry গড়ে উঠেছে, যেমন Euclid Geometry-র চতুর্থ উপপাদ্য হ,ল "দুটি ত্রিভুজের একটির দুই বাহু যথাক্রমে অপর ত্রিভুজের দুটি বাহুর সংগে সমান এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত কোন সমান হ'লে ত্রিভুজ দুটি সর্বসম হবে।" এর প্রমাণের জন্য একটি ত্রিভুজকে অন্য ত্রিভুজের ওপর স্থাপন করা হয়েছে। কোন রূপ বিকৃতি না ঘটিয়ে একটা ত্রিভুজকে স্থানান্তরিত করা হয়েছে। এর ফলে ত্রিভুজের ধর্মগুলিও অপরিবর্তিত রয়েছে। কিন্তু এ রূপান্তর সম্ভব কি না ? তাই বর্তমান পাঠক্রমে এর সমাধান করেছে **চলন, ঘূর্ণন ও প্রতিফলনের** মাধ্যমে। প্রতিফলনের দ্বারা কার্য্যশীলতার ভিতর দিয়ে এই রূপান্তরগুলো ও তাদের ধর্মগুলির সম্পর্কে অতি সহজেই শিশুদের ধারনা দেওয়া সম্ভব। এই প্রতিফলন পদ্ধতিই পরবর্তীকালে জ্যামিতিক সত্যকে প্রতিষ্ঠা করার জন্য এগুলিকে স্বতঃসিদ্ধ হিসাবে কাজে লাগাতে পারে। এই ধারণা থেকে প্রতিসাম্যের ধারণায় আসা যায়, যে ধারনা শিশুদের সুন্দর সুন্দর কর্মশীলতার খোরাক জোগাবে। তাছাড়া প্রতিসম চিত্রগুলির ধর্মসমূহ প্রতিসাম্যের ধারণা থেকে অতি সহজেই নির্ধারণ করা সম্ভব।

তাই নতুন পাঠক্রমে **সক্রিয়তার ওপর বেশী জোর** দেওয়া হয়েছে। বিশেষতঃ ষষ্ঠ ও সপ্তম শ্রেণীতে। এটাকে কার্য্যকরী করতে গেলে মডেল, চার্ট প্রভৃতি শিক্ষার্থীরা নিজেরাই তৈরী করবে।

বিন্যাস

নতুন পাঠক্রম ও বিন্যাস (Set) :—নতুন পাঠক্রমে ঐচ্ছিক গণিতের মধ্যে একটি বিষয় অন্তর্ভুক্ত হয়েছে যার নাম হ'ল Elements of Discrete Mathematics"। এর অন্তর্গত **"বিন্যাস"** বা 'Set' একটি উল্লেখযোগ্য অংশ। জ্যামিতির অন্তর্গত "Undefined Terms" হিসাবে যেমন বিন্দু রেখা প্রভৃতির গাণিতিক সংজ্ঞা দেওয়া যায় না, তেমনি বিন্যাস বা Set-এর কোন সঠিক গাণিতিক সংজ্ঞা দেওয়া যাবে না। তবে সাধারণভাবে যে কোন সংখ্যার বস্তুর সমষ্টিগত পরিচয়ই হ'ল **'বিন্যাস'** বা Set। প্রত্যেকটি বস্তু ঐ বিন্যাস-এর এক একটি পদ বা Element। এগুলি কিন্তু **স্বজ্ঞাভিত্তিক সংজ্ঞা** বা Intuitive definition। যেমন, সমস্ত ধনাত্মকঅখণ্ড সংখ্যার বিন্যাসে 2, 5, 14, প্রভৃতিগুলি হ'ল **পদ** বা Element। তেমনি একটি শ্রেণীর সমস্ত শিক্ষার্থীর বিন্যাসে প্রতিটি শিক্ষার্থী এক **একটি পদ** বা Element। Algebra of Sets-এর মধ্যে ব্যবহৃত চিহ্নাবলীর বড় হাতের অর্থাৎ A, B, C, X... প্রভৃতি অক্ষরগুলি বিন্যাসকে এবং ছোট হাতের যেমন a, b, c, x, y, z প্রভৃতি অক্ষরগুলি বিন্যাস-এর 'পদ'কে চিহ্নিত করে। **যেমন** (1) **A বিন্যাস এর a যদি একটি পদ হয় তাহলে আমরা লিখতে পারি** $a \in A$ অর্থাৎ a, A বিন্যাস-এর অন্তর্গত একটি পদ।

∴ $\in$ চিহ্নটি হ'ল "belongs to" বা অন্তর্গত।

তেমনি (2) a, A বিন্যাসের পদ না হ'লে লিখতে পারি $a \notin A$ অর্থাৎ a, A বিন্যাসটির পদ নয়। ∴ $\notin$ চিহ্নটি হ'ল "does not belong to" বা অন্তর্গত নয়।

(3) **যদি A বিন্যাসের প্রতিটি পদ অপর এক বিন্যাস B এরও একটি পদ হয়, তাহলে A কে বলা হয় B এর উপবিন্যাস বা** Subset।

অর্থাৎ $A \subset B$ বা $B \supset A$ হিসাবে লেখা যায়।

(4) **যদি** $B \subset A$ **হয় এবং A বিন্যাসের অন্ততঃ একটি পদ a, যা B বিন্যাসের পদ নয় অর্থাৎ** $a \in B$, **কিন্তু** $a \notin B$, **তবে B কে A বিন্যাসের যথার্থ উপবিন্যাস বা Proper Subset বলা হয়।** $A = B$ হলেও উক্ত সর্ত সিদ্ধ হবে। আমরা তখন বলতে পারি যে, প্রতিটি বিন্যাস তার নিজেরই একটি উপবিন্যাস এবং লেখা যায় $A \subseteq B$।

(5) **দুটি বিন্যাস A ও B যদি এরূপ হয় যে A এর প্রত্যেকটি পদ B এর একটি পদ এবং B এর প্রত্যেকটি পদ A-র এক একটি পদ অর্থাৎ যদি** $a \in A$ **হয়, তবে** $a \in B$, **এবং যদি** $b \in B$ **হয়,** $b \in A$ **হবে। তখন A ও B বিন্যাস দুটি সমান অর্থাৎ** $A = B$

(6) **যদি** $A \subset B$ **এবং** $B \subset C$ **হয় তবে** $A \subset C$ **হবে।**

(7) আবার প্রত্যেক বিন্যাসকে একটি বিশেষ বিন্যাস U-এর উপবিন্যাসরূপে কল্পনা করা হয়েছে। অর্থাৎ A set consisting of all elements under discussion is defined as the universal set বা **সার্বিক বিন্যাস**। তাই প্রত্যেক বিন্যাসই একটি সার্বিক বিন্যাসের উপবিন্যাস। একে চিহ্নিত করা হয় U বা (1) দ্বারা।

(8) যে বিন্যাসে কোন পদ থাকে না, তাকে **শূন্যবিন্যাস** বলে এবং তাকে চিহ্নিত করা হয় ϕ দ্বারা। **শূন্যবিন্যাস**কে বলা হয় Null Set বা Empty Set। এছাড়া আধুনিক গণিতে প্রচলিত আরো কয়েকটি প্রতীক সম্পর্কে আমাদের পরিচিতি লাভ করা দরকার। সেগুলি হ'ল :

$\cup$ = এটি বিন্যাসের **যোগ** অর্থাৎ Union-এর প্রতীক
$\cap$ = এটি বিন্যাসের **ছেদ** অর্থাৎ Intersection-এর প্রতীক
$\wedge$ = '**এবং**' অর্থাৎ 'and' এর প্রতীক
V = '**বা**' অর্থাৎ 'or' এর প্রতীক
~বা (') = '**হয় না** অর্থাৎ 'Is not' এর প্রতীক
$\Rightarrow$ = '**অন্তর্ভুক্ত**' বা 'Implies' এর প্রতীক (i)
$\Leftarrow$ = '**কারোর দ্বারা অন্তর্ভুক্ত**' বা 'is implied by'-এর প্রতীক (ii)
$\Longleftrightarrow$ = উপরোক্ত (i) এবং (ii) এর **সমন্বয়ের প্রতীক**
$\exists$ = '**অবস্থিত**' বা 'there exists' এর প্রতীক
$\forall$ = '**সমস্ত মানের জন্য**' বা for all values of' এর প্রতীক
$\rightarrow$ = এটি **লক্ষণার** প্রতীক
$>$ = '**বৃহত্তর**'-র প্রতীক
$\geqslant$ = **বৃহত্তর বা সমান** এর প্রতীক
$<$ = **ক্ষুদ্রতর**-এর প্রতীক।
$\leqslant$ = **ক্ষুদ্রতর বা সমানের** প্রতীক।
$\odot$ = এটি কোন **প্রক্রিয়ার** প্রতীক হিসাবে ব্যবহৃত হয়।
iff = '**যদি এবং কেবল যদি**' বা 'If and only if' এর প্রতীক।

Venn Diagram [**ভেন্ চিত্র**] এবং Algebra of Sets :

'বিন্যাস' ও 'পদ' এর ধারণা হ'ল **স্বজ্ঞাভিত্তিক**। এই ধারণাকে সুদৃঢ় করার এবং Algebra of sets-এর মৌলিক নীতিগুলির ব্যাখ্যার জন্য ভেন্‌চিত্র বা Venn Diagram-এর প্রবর্তন হয়েছে। বিখ্যাত ব্রিটিশ গণিতজ্ঞ জন ভেন্ **যুক্তিভিত্তিক সত্যতার** (Logical truths) ব্যাখ্যার জন্য সর্বপ্রথম এই ভেন্‌চিত্রের আশ্রয় নিয়েছিলেন। ভেন্‌চিত্রে একটি আয়তাকার ক্ষেত্রের মধ্যবর্তী বিন্দুসমূহের বিন্যাসকে **সার্বিক বিন্যাস** বা Universal Set রূপে প্রকাশ করা হয়। ভেন্‌চিত্রে সার্বিক বিন্যাসের অন্তর্গত অপর কোন বিন্যাসকে ঐ আয়তাকার ক্ষেত্রের মধ্যবর্তী অন্য কোন সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের অন্তর্গত বিন্দুসমূহের দ্বারা প্রকাশ করা হয়। বিন্যাস-এর বিভিন্ন ধরণের সংযোগকে Shade-এর সাহায্যে নির্দেশ করা হয়।

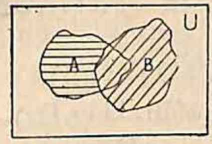
ভেন্‌চিত্র ও Algebra of Sets

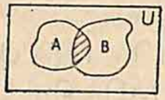
যদি A বিন্যাসের পদগুলি a_1, a_2, a_3, এবং B বিন্যাসের পদগুলি b_1, b_2, b_3, হয় তাহলে A∪B-র মধ্যে a_1, a_2, a_3 b_1, b_2, b_3 পদগুলি থাকবে। Venn Diagram-এর মাধ্যমে প্রকাশ করলে ১নং চিত্রটিতে পাওয়া যায়।

A ও B বিন্যাস দুটির ছেদকে প্রকাশ করা হয়, A ∩ B হিসাবে। এই ছেদ এর মধ্যস্থিত পদগুলি A ও Bর মধ্যে সাধারণ। তখন আমরা পাই :

$A \cap B = \{ x : x \in A$ এবং $x \in B \}$ এবং A ও B বিন্যাস দুটির সাধারণ অংশ

হ'ল $A \cap B$। Venn Diagram অনুযায়ী $A \cap B$ হ'ল নিম্নের ২নং চিত্রের রেখাঙ্কিত অংশটি।

(১) 

 (২)

তাহলে A ও B ছেদ করবে যখন $A \cap B$ একটি শূন্য বিন্যাস হবে না। কিন্তু $A \cap A'$ একটি শূন্যবিন্যাস। আমরা এভাবে নিম্নলিখিত ফলগুলি পাই। যেমন :—

(1) $A \cap A = A$ (2) $A \cap U = A$ (3) $A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cap B = A$

দুটি বিন্যাস সংযুক্ত হবে না যদি তাদের ছেদ একটি শূন্য বিন্যাস হয়। মনে করি A হ'ল ধনাত্মক সংখ্যার বিন্যাস এবং B হ'ল ঋণাত্মক সংখ্যার বিন্যাস তাহলে $A \cap B$ একটি শূন্যবিন্যাস এবং A, B দুটি বিযুক্ত বিন্যাস। A ও B দুই বিন্যাসের অন্তরকে $A - B$ দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। তখন লেখা হয় : $A - B = A \cap B'$।

Algebra of sets এর কয়েকটি **মৌলিক নীতি** আমাদের মনে রাখা প্রয়োজন এবং সেগুলি Venn Diagram এর পরিপ্রেক্ষিতে স্বজ্ঞাভিত্তিক ব্যাখ্যা করাও সম্ভব।

Fundamental laws in the Algebra of Sets :

(1) **বিনিময় নিয়ম** (Commutative law) :
$A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$

Algebra of Sets এর মৌলিক নীতি

(2) **সংযোগ নিয়ম :** (Associative law) :
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(3) **বিচ্ছেদনিয়ম** (Distributive law) :
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(4) **পরিপূরকের নিয়ম** (Laws of Complementation) :
$U' = \phi$; $\phi' \equiv U$; $A \cup A' = U$; $A \cap A' = \phi$; $(A^1)' = A$
ϕ এখানে একটী **শূন্য বিন্যাস**।

(5) **সমার্থক বিভিন্ন পদ বিন্যাসের নিয়ম** (Laws of Tautology) :
$A \cap A = A$; $A \cup A = A$

(6) **শোষণের নিয়ম** (Laws of Absorption) :
$A \cap (A \cup B) = A$; $A \cup (A \cap B) = A$

(7) **ডিমরগ্যানের নিয়ম** (Laws of De Morgan) :
$(A \cap B)' = A' \cup B'$; $(A \cup B)' = A' \cap B'$

উপরোক্ত নিয়মগুলির মধ্যে (1), (2) এবং (3) এর প্রথমটী বীজগণিতের প্রকৃত সংখ্যার ক্ষেত্রেও যথার্থ। অন্যান্য নিয়মগুলি Algebra of Sets এর ক্ষেত্রেই যথার্থ ; এবং এদের পরিধিও ব্যাপক। (6) এবং (7) এর নিয়মগুলি সংযোগ ও ছেদ্ এর সংজ্ঞার পরিপ্রেক্ষিতে উপস্থাপন করা যায়। (4) এর নিয়মগুলি সার্বিক বিন্যাস এবং শূন্য বিন্যাসকেই অনুসরণ করে। যেমন : (6) এর ক্ষেত্রে,

$A\cap (A\cup B)=(A\cap A)\cup (A\cap B)=(A\cap U)\cup (A\cap B)$
$=A\cap (U\cup B)=A\cap U=A$

অনুরূপে, $A\cup (A\cap B)=(A\cup A)\cap (A\cup B)=A\cap (A\cup B)=A$

(7) এর ক্ষেত্রে,

$(A\cap B)\cap (A'\cup B)=(A\cap B\cap A')\cup (A\cap B\cap B')$
$=(A\cap A'\cap B)\cup (A\cap B\cap B')=(\phi\cap B)\cup (A\cap\phi)=\phi$

আবার $(A\cap B)\cup (A'\cup B')=(A'\cup B')\cup (A\cap B)$
$=(A'\cup B'\cup A)\cap (A'\cup B'\cup B)=(A'\cup A\cup B')\cap (A'\cup B'\cup B)$
$=(U\cup B')\cap (A'\cup U)=U\cap U=U$

স্নুতরাং পরিপূরকের সংজ্ঞা অনুযায়ী আমরা পাই,

$(A\cap B)'=A'\cup B'$ এবং $(A'\cup B')'=A\cap B$

কিন্তু A যদি A′ এর পরিপূরক হয় তাহলে A′ ও A-র পরিপূরক হবে।

তখন আমরা পাই, $(A\cup B)'=A'\cap B'$

যে সমস্ত বিন্যাসে $\cup$ এবং $\cap$ চিহ্ন দুটী স্থান পরিবর্তন ক'রে কোন স্নসমঞ্জস ফল প্রদান করে তাকে **বিন্যাসের দ্বিত্বনীতি** বা Principle of duality বলা হয়।

সাধারণ গণিতে বিন্যাসের ব্যবহার : (Use of Sets in Traditional Mathematics) :

বিন্যাসের ব্যবহার

গ. সা. গু ও ল. সা. গু. নির্ণয়ের ক্ষেত্রে : p এবং q দুটি স্বাভাবিক সংখ্যার A ও B উৎপাদকের বিন্যাস অর্থাৎ $A\cap B$ হল p এবং q এর সাধারণ উৎপাদক-এর বিন্যাস এবং এটি শূন্য বিন্যাস নয় বরং সসীম। ঐ সাধারণ উৎপাদক সমূহের মধ্যে বৃহত্তমটী হবে গ. সা. গু।

যেমন : 30, 45, 60 এর গ. সা গু নির্ণয় করতে হলে,

$30=A=\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$
$45=B=\{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$
$60=C=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$
$\therefore\ A\cap B\cap C=\{1, 3, 5, 15\}$
$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু $=15$

বিন্যাস এর নিয়ম অনুযায়ী ল. সা. গু. ও নির্ণয় করা যায়, যদি p এবং q দুইটী স্বাভাবিক সংখ্যা এবং A ও B ঐ সংখ্যাগুলি বিভিন্ন গুণিতক হয় তখন

$A=\{p, 2p, 3p......\}$ or $\{xp : x\in N\}$
$B=\{q, 2q, 3q......\}$ or $(xq : x\in N)$

যখন N হ'ল 1, 2, 3,......স্বাভাবিক সংখ্যার বিন্যাস। তখন $A\cap B$ একটি শূন্য বিন্যাস হবে না এবং তার লঘিষ্ট পদ বা সংখ্যা থাকবেই ; এই ল ঘষ্ট সংখ্যা বা পদটাই হ'ল ল. সা. গু। **যেমন :**

6, 9 এবং 18 এর ল. সা. গু কত ?

$6=A=\{6, 12, 18, 24, 30, 36\cdots\}$
$9=B=\{9, 18, 27, 36, 45...\}$
$18=C=\{18, 36, 54, 72, 90, ..\}$
$A\cap B\cap C= 18, 36...\}$
$\therefore$ ল. সা. গু $=18$

এই বিন্যাসতত্ত্ব অনুযায়ী গ.সা.গু ও ল.সা.গু তখনই ফলপ্রদ হবে যখন সংখ্যাগুলি অল্প ও ছোট ছোট থাকবে। অন্যান্য সময় গতানুগতিক পদ্ধতি অবলম্বন করাই শ্রেয়।

বিন্যাস তত্ত্ব অনুযায়ী ভগ্নাংশ, দশমিক, শতকরা হিসাবও সুদ কষা প্রভৃতিও শিক্ষাদান করা সম্ভব।

বীজগণিত-এর ক্ষেত্রে গ. সা. গু, ল. সা. গু নির্ণয়, সূত্রাবলী নির্ণয়, উৎপাদক নির্ণয়, সমীকরণ প্রভৃতি শিক্ষাদানে বিন্যাস তত্ত্বের প্রয়োগ করা যায়।

নতুন পাঠক্রম ও বুলিয়ান বীজগণিত (Boolean Algebra)

বুলিয়ান বীজগণিত

মাধ্যমিক স্তরের নতুন পাঠক্রমে ঐচ্ছিক গণিতের Elements of Discrete Mathematics এর মধ্যে Boolean Algebra অন্তর্ভুক্ত হয়েছে Algebra of Sets, যা আগে আলোচনা করা হয়েছে, সেটিও Boolean Algebra-র একটি অংশ। Boolean Algabra-র অগ্রগতি **পুরোপুরি স্বজ্ঞাভিত্তিক** (Intuitive) এবং এটি Computer Circuit বা **গণনাকারক বেষ্টনীতে ব্যবহৃত একটি নিদর্শন বা নমুনা**। একে অনেক সময় Algebra of Logic বা **যুক্তিবিদ্যার বীজগণিত**ও বলা হয়। যদি কোন প্রক্রিয়ায় ডুটী পদ বা অবস্থার সৃষ্টি হয় তখনই সে বিন্যাস বা **প্রক্রিয়াকে** Boolean Algebra **বলা হয়**।

Binary Operation

দ্বিপদ প্রক্রিয়া (Binary system) : যখন 'O' প্রক্রিয়া A বিন্যাসের ডুটী পদে প্রযুক্ত হয় এবং একই বিন্যাসের একমাত্র পদ সৃষ্টি করে তখন ঐ প্রক্রিয়ার নাম **দ্বিপদ প্রক্রিয়া**। যেমন, একই বিন্যাসের a, b ডুটী পদ এবং ঐ বিন্যাসেরই c, একমাত্র পদ, তখন c=a o b ; চার নিয়মের প্রক্রিয়াটীও **দ্বিপদ প্রক্রিয়া** ; Algebra of Sets এ সংযোগ, ছেদ প্রক্রিয়াও দ্বিপদ প্রক্রিয়া। সংযোগের নিয়ম, বিনিময়ের নিয়ম, বিচ্ছেদের নিয়ম প্রভৃতি বীজগণিতের নিয়মগুলিও দ্বিপদ প্রক্রিয়ার দ্বারা সিদ্ধ।

যদি একটী পদবিন্যাস Aতে ডুটী প্রক্রিয়া এবং O এবং * থাকে এবং যদি নিম্নলিখিত **শর্তগুলি** পূরণ করে তখনই তাকে বুলিয়ান বীজগণিত বলা হয় :—

(1) O এবং * প্রক্রিয়া হবে বিনিময় ভিত্তিক।

(2) O এবং * প্রক্রিয়ার প্রত্যেকে অপরের বিচ্ছেদকারী।

(3) *A*-র মধ্যে * প্রক্রিয়ার জন্য (মনে করি) a এবং O প্রক্রিয়ার জন্য (মনে করি) d সদৃশ পদ থাকবে যাতে $X \subseteq A$-র জন্য সবসময় $X^* a = x$ এবং $x \circ d = x$

(4) A-র মধ্যে প্রতিটী x-র জন্য A′ একটী পদ থাকবে যাতে $x * x' = d$ এবং $x \circ x' = a$

উদাহরণ :—(1) a, b, c, d পদ এবং (O), (*) প্রক্রিয়া বিশিষ্ট A বিন্যাস একটী বুলিয়ান বীজগণিত।

o	*a*	*b*	*c*	*d*
a	*a*	*b*	*c*	*d*
b	*b*	*b*	*b*	*b*
c	*c*	*b*	*c*	*b*
d	*d*	*b*	*b*	*d*

*	*a*	*b*	*c*	*d*
a	*a*	*a*	*a*	*a*
b	*a*	*b*	*c*	*d*
c	*a*	*c*	*c*	*a*
d	*a*	*d*	*a*	*d*

(2) O এবং 1 [যে ডুটী (+) এবং (⊙) প্রক্রিয়ার সঙ্গে সদৃশ পদ] পদবিশিষ্ট A বিন্যাসও একটী Boolean Algebra :

+	0	1
0	0	1
1	1	1

·	0	1
0	0	0
1	0	1

পূর্বোক্ত প্রক্রিয়ায় নিয়মগুলি Switching Circuits-এ প্রয়োগ করা হয় যার দুটী পদ। সুতরাং Switching Circuits-এর বীজগণিতও একটী Boolean Algebra।

সংখ্যা গণনাকারক বেষ্টনীর (Digital Computor Circuits) বিশ্লেষণে আমরা দুটি প্রক্রিয়ার সাহায্য নিই একটি AND gate এবং অপরটি OR gate। যদি আমরা তাদের 1 এবং 0 পদ হিসেবে ধরি এবং OR gaie এর জন্য (+) এবং AND gate এর জন্য (.) ধরি তাহলে সংখ্যা গণনাকারক বেষ্টনীর বীজগণিতও একটি Boolean Algebra হবে। এই বীজগণিতের ফলাফলকে **সংখ্যা গণনাকারক বেষ্টনী বিশ্লেষণে ব্যবহার** করতে পারি।

নতুন পাঠক্রম ও সত্য তালিকা (Truth Table): Symbolic Logic এ বচন বা Proposition এর সত্যমান বলতে বোঝায় কোন বিবৃতির সত্যতা বা অসত্যতা বিচার করা। যখন দুটি বচন 'এবং' বা ∧ দ্বারা সংযুক্ত হয় তখন তাকে Conjunctive Proposition বা **যৌগিক বচন** এবং যখন 'অথবা' (V) দ্বারা সংযুক্ত হয় তখন তাদের বৈকল্পিক বচন বা Disjunctive Proposition বলে।

সত্য তালিকা

অনেক সময় 'এবং' এর বদলে (.) এবং 'অথবা'-র বদলে (+) প্রতীকও ব্যবহার করা হয়। কোন বচনের সত্যমান 'সত্য' বা 'অসত্য' হলে তার নঞর্থক বচনের সত্যমান হবে যথাক্রমে 'অসত্য' বা 'সত্য'। **নঞর্থক বচন** বা Negatation of a Propositionকে (~) বা (´) প্রতীক দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

'সত্য' এবং 'অসত্য' এই দুটি সত্যমানকে (1) এবং (0) দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

প্রথমে x.y অর্থাৎ x এবং y এই যৌগিক বচনটাই ধরা যাক। x ও y এর সম্ভাব্য সমস্ত সত্যমানের জন্য x.y এর সত্যমান কি হতে পারে তা দেখান হ'ল।

যদি x সত্য এবং y সত্য হয়, তবে xy সত্য।

যদি x সত্য এবং y অসত্য হয়, তবে xy অসত্য।

যদি x অসত্য এবং y সত্য হয়, তবে xy অসত্য।

যদি x অসত্য এবং y অসত্য হয়, তবে xy অসত্য।

[x সত্য বলতে x এর সত্যমান 'সত্য' বা 1 ধরা হয়]

উপরোক্ত আলোচনাকে নীচের তালিকা দ্বারা প্রকাশ করলে,

x	y	xy
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

যে তালিকা থেকে দুই বা ততোধিক বচনের সমস্ত সত্যমানের জন্য তাদের যৌগিক বা বৈকল্পিক বা অন্য কোন সংযুক্ত বচনের সমস্ত সত্যমান পাওয়া যায় তারই নাম Truth Table বা **সত্যতালিকা**।

সাধারণভাবে **বেষ্টনীর নক্সা** (Design of Circuits) তৈরীর ব্যাপারে Boolean Algebra. Truth Table এর নিয়মাবলী বিশেষ প্রয়োজনীয় ও গুরুত্বপূর্ণ।

নতুন পাঠক্রম ও দ্বিগুণোত্তর সংখ্যা পদ্ধতি (Binary System): গণনা বিজ্ঞানের দ্রুত অগ্রগতি এবং তৎসম্পর্কীয় বিভিন্ন যন্ত্রপাতির ব্যবহার, এর

জন্যই Binary System এবং Binary Code-এর প্রচলন। উন্নত গণিতশাস্ত্র এবং অন্যান্য গণিতভিত্তিক বিষয়েও প্রতীক হিসাবে-এর ব্যবহার রয়েছে। তাই বিদ্যালয় স্তরে এর অন্তর্ভুক্তি শিক্ষার্থীদের মধ্যে সংখ্যাগণনা সম্পর্কে এক আনন্দপূর্ণ উৎসাহের সঞ্চার করবে।

দ্বিগুণোত্তর সংখ্যা পদ্ধতি

Binary System এর বিভিন্ন চিহ্ন ও প্রতীক, সংখ্যাগণনা পদ্ধতি প্রভৃতি গণিতশাস্ত্রে **বিন্যাস ও সমবায়** (Permutation and Combinations). **সূচকের নিয়মাবলী,** Slide Rule-**এর কার্য্যাবলী, লগারিদম্** প্রভৃতিতে বিশেষভাবে প্রয়োগ করা যায়।

আমাদের প্রচলিত সংখ্যাপদ্ধতি ছিল **দশগুণোত্তর** কিন্তু Binary System এর সংখ্যাপদ্ধতি হ'ল **দ্বিগুণোত্তর। দ্বিগুণোত্তর সংখ্যাপদ্ধতির মূল হ'ল** 2 এবং **প্রভাক হ'ল** (0) এবং (1)।

তাই দ্বিগুণোত্তর সংখ্যাপদ্ধতির 1011 দশগুণোত্তর সংখ্যা পদ্ধতির 11 এর সমান।

$$1\times 2^3+0\times 2^2+1\times 2^1+1=11$$

এবং একে লেখা যায়, $(1011)_2=(11)_{10}$

দ্বিগুণোত্তর সংখ্যালিখন পদ্ধতির প্রবর্তন :

সংখ্যা............	2^4	2^3	2^2	2^1	1
1					✓
2				✓	
3				✓	✓
4			✓		
5			✓		✓
6			✓	✓	
			✓	✓	✓
8		✓			
9		✓			✓
10		✓		✓	
11		✓		✓	✓

ইত্যাদি,

উপরোক্ত তালিকাতে ✓-এর বদলে 1 এবং শূন্যস্থানে 0 বসালেই আমরা দশগুণোত্তর সংখ্যার বদলে দ্বিগুণোত্তর সংখ্যা পেয়ে যাবো। যেমন,

দশগুণোত্তর সংখ্যা	**দ্বিগুণোত্তর সংখ্যা**
1	00001
2	00010
3	00011
4	00100
5	00101
6	00110
7	00111
8	01000
9	01001
10	01010
11	01011
ইত্যাদি	ইত্যাদি

এই Binary System এর চিহ্নগুলি সাধারণভাবে Teleprinters, Electrical Machinary প্রভৃতি পরিচালনায় বিশেষ প্রয়োজন।

নতুন পাঠক্রম সম্পর্কে মতামত ঃ

সামাজিক, রাজনৈতিক, মহাজাগতিক ও পার্থিব রহস্য উদঘাটনে এবং **জ্ঞান-বিজ্ঞানের প্রায় প্রতি ক্ষেত্রেই** যখন গণিতের প্রয়োগ হচ্ছে, তখন নিশ্চয়ই আমরা এই নতুন পাঠক্রমকে আহ্বান জানাবো। কিন্তু প্রবর্ত্তনের আগে গণিত-শিক্ষণের সঙ্গে যাঁরা সরাসরি যুক্ত অর্থাৎ বিদ্যালয়ের **গণিত শিক্ষকদের** এ সম্পর্কে **বিশেষ শিক্ষণের প্রয়োজন**। যেমন, জ্যামিতির **রূপান্তর, বিন্যাস তত্ত্ব** প্রভৃতি **সত্যই শিক্ষণীয় ও আকর্ষনীয়** ; কিন্তু এ সম্পর্কে **সঠিক উপস্থাপন পদ্ধতি শিক্ষকদের সামনে তুলে ধরা দরকার**। তা নাহ'লে গণিত শিক্ষণ হবে গতানুগতিক ও ক্রটিপূর্ণ। তাছাড়া প্রয়োজন রয়েছে **উপকরণের**। উপকরণ তৈরী করা, তার জন্য অর্থসংগ্রহ, সময় তালিকায় তাকে সন্নিবিষ্ট করা—সব কিছুই বাস্তবানুগ হবে কিনা সেটা বিচার করতে হবে। মাধ্যমিক স্তরে বহু প্রশংসিত বহুমুখী পাঠক্রমকে বিদায় দিয়ে Work-Education, Physical Education, Physical Science, Life Science প্রভৃতি সুশ্রী অথচ ভারাক্রান্ত পাঠক্রম প্রচলন ক'রে **মাধ্যমিক শিক্ষক সমাজের মধ্যে যে ভীতির সঞ্চার করা হয়েছে তাতে তাঁরা আবার গণিতকে এই নতুন শিক্ষাপদ্ধতির পরিপ্রেক্ষিতে কতটা গ্রহণ করবেন তাতে বেশ সন্দেহ রয়েছে**। তার ওপর আবার ঐচ্ছিক গণিত হিসাবে Discrete Mathematics-এর বোঝা। এটাকে বোঝা বলছি এই জন্যই যে, এতে যে সমস্ত বিষয় অন্তর্ভুক্ত করা হয়েছে, সেগুলি সাধারণ বুদ্ধি সম্পন্ন শিক্ষার্থীর কাছে **জটিল ও দুর্বোধ্য**। তাকে আয়ত্ত করতে গেলে শিক্ষকদের বিভিন্ন Reference বই **পড়তে** হবে এবং তাও **সময়-সাপেক্ষ**। কিন্তু শিক্ষকদের কোন সময় না দিয়েই হঠাৎ এই ধরণের উচ্চপর্যায়ের গণিতের অন্তর্ভুক্তি গণিত শিক্ষণকে করবে **অস্থায়ী, ভীতিপ্রদ ও যান্ত্রিক**। আর যদি সত্যই গণিতকে নতুন দৃষ্টিভঙ্গী দিয়ে গ্রহণ করতে হয়, **সুরু করতে হবে প্রাথমিক স্তর থেকেই,** যেমন করেছে রাশিয়া, ইংলণ্ড ও আমেরিকা। তার জন্য প্রয়োজন **গণিত পাঠক্রমের আমূল সংস্কার** ও তার **উপযুক্ত শিক্ষণ ব্যবস্থা**।

সমালোচনা

প্রশ্নাবলী

1. Discuss the different objectives of the newly introduced curriculum of Mathematics in the Secondary stage and how they can be realised in practice.

2. Critically estimate the newly introduced Mathematics curriculum on the basis of its teaching.

3. What do you mean by a Set? How will you introduce Set-Theories in the teaching of school Mathematics?

4. Discuss the various symbols used in New Mathematics with examples.

5. Write notes on :—
Venn Diagram, Boolean Algebra, Truth Table, Binary System.

দশম অধ্যায়

পাটীগণিত শিক্ষণ (Teaching of Arithmatic)

পাটীগণিত শিক্ষার প্রত্যক্ষ উদ্দেশ্য :

সংখ্যা পদ্ধতি, তার সরল প্রক্রিয়া ও নিয়মাবলী সম্পর্কে শিক্ষার্থীদের পরিচিত করা, সংখ্যা পদ্ধতির সম্পাদন প্রক্রিয়া সম্পর্কে জ্ঞানার্জনে সহায়তা করা এবং **দৈনন্দিন জীবনের বিভিন্ন সমস্যার সমাধানে তাদের প্রয়োগ করতে শেখানোই** হচ্ছে বিদ্যালয়স্তরে **পাটীগণিত শিক্ষার প্রত্যক্ষ উদ্দেশ্য।**

সংখ্যাজ্ঞান (Concept of Number) **:**

পাটীগণিতের ভিত্তিই হ'ল সংখ্যা। তাই সংখ্যাজ্ঞান বা সংখ্যার ধারণাই হ'ল পাটীগণিতের মূলবিষয়। এটি একটি জটিল প্রক্রিয়া ও অমূর্ত বিষয়। শিক্ষার প্রাথমিক স্তরে মূর্ত বস্তু থেকে সুরু করলেও পরিশেষে সংখ্যা এক বিমূর্ত বা অমূর্ত বিষয়ে পরিণত হয়।

সংখ্যার ধারণা সম্পর্কে বিভিন্ন মতামতের উদ্ভব হয়েছে। পীথাগোরাস দার্শনিক দৃষ্টিভঙ্গীতে অনুভব করেন "All things are numbers"। শূন্য, অসীম, $\sqrt{2}$ প্রভৃতিগুলি এক একটি আদশাকৃত ধারণা। আবার অনেকে বলেন সংখ্যা হ'ল একটি গুণ। কিন্তু সাধারণ অর্থে **সংখ্যার প্রাথমিক ধারণাটা হ'ল বিশেষণ-বাচক** এবং এই ধারণা **প্রতীকের সাহায্যেই প্রকাশ করা হয়।** যেমন : একটি ছেলে, দুটী কলম, তিনটী খাতা প্রভৃতি। তাই **সংখ্যা হ'ল গুণগত ও পরিমাণগত প্রতীকভিত্তিক ধারণা।** বীজগণিত ও জ্যামিতিতেও প্রতীকের ব্যবহার রয়েছে। তবে সেগুলি পাটীগণিতের মতো অত বেশী বিমূর্ত, কঠিন বা জটিল নয়।

সংখ্যার ধারণা প্রকাশ

সংখ্যার গণনা, প্রতীক চেনা ও ব্যবহার, দলগত অর্থ ও তাৎপর্য, গুণগত ও পরিমাণগত সম্পর্ক, শূন্যের ধারণা ও ব্যবহার এবং সংখ্যার স্থানীয় মান সম্পর্কীয় সরল ধারণার সমন্বয়েই সংখ্যা সংক্রান্ত জটিল ধারণার সৃষ্টি।

সংখ্যাজ্ঞান সম্পর্কে সুস্পষ্ট ধারণা দেবার বিভিন্ন স্তর :

(১) **বস্তুভিত্তিক স্তর :** (Concrete or object stage) :

এই স্তরে শিশু বাস্তব জিনিসের সহায়তায় গণনা করতে শেখে।

(২) **চিত্রভিত্তিক স্তর** (Picture stage) :

সংখ্যাজ্ঞানের বিভিন্ন স্তর

বস্তুর মাধ্যমে গণনা করার দক্ষতা অর্জন করলে, শিশুদের কাছে সংখ্যার চিত্রগত প্রতিরূপ উপস্থাপন করা যায়।

(৩) **অর্ধমূর্ত্ত স্তর** (Semi-Concrete stage) :

এই স্তরে সংখ্যার চিত্রের বদলে বৃত্ত, বিন্দু, রেখা প্রভৃতি প্রতীকের মাধ্যমে সংখ্যার ধারণা দেওয়া যায়।

যেমন :					
	O	O	OO	OO	
		O	O	OO	প্রভৃতি
	1	2	3	4	

(৪) **বিমূর্ত্ত প্রতীক স্তর** (Abstract symbol stage) :

এইস্তরে শিশু লিখিত প্রতীক বা শব্দগত প্রতীকের সাহায্যে সংখ্যার ধারণা লাভ করতে পারে। তবে এখানে প্রতীকের সঙ্গে সংখ্যার ক্রমিক ধারণা, দলগত ধারণা প্রভৃতির সম্পর্ক সংযুক্ত করতে হবে।

সংখ্যার স্থানায় মান (Place value of Number system) :

সমস্ত সংখ্যাকে প্রতীকের সাহায্যে প্রকাশ করতে গেলে অসংখ্য প্রতীকের প্রয়োজন। সেইজন্য দশটি প্রতীকের সাহায্যে অর্থাৎ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 এবং 9 এর সাহায্যে যে কোন বড় সংখ্যাকে আমরা **দশগুণোত্তর পদ্ধতিতে** প্রকাশ করে থাকি। গণনাকারক বিজ্ঞানে (Computers' Science) ব্যবহৃত **দ্বিগুণোত্তর সংখ্যালিখন পদ্ধতিতে** (1) ও (0)-এই দুটী প্রতীকের সাহায্যে বড় সংখ্যাকে প্রকাশ করা হয়, যার আলোচনা আমরা আগেই করেছি।

সংখ্যার স্থানীয় মানের প্রকাশ

প্রথম চার নিয়ম (First four rules) :

পাটীগণিতের প্রথম চার নিয়ম অর্থাৎ যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ পরস্পর সম্পর্কযুক্ত। তাই তাদের সম্পাদনক্রিয়ার শিক্ষণও পরস্পর সম্পর্কযুক্ত হওয়া উচিত। **পাটীগণিতের চার নিয়ম হ'ল চার ধরণের গণনাপদ্ধতি।** সম্মুখভাগের গণনা হ'ল যোগ, পশ্চাদ্‌ভাগের গণনা হ'ল বিয়োগ এবং গুণ ও ভাগের গণনা হ'ল একক দৈর্ঘ্যের পরিপ্রেক্ষিতে সম্মুখ বা পশ্চাদ্‌ভাগের গণনা।

প্রথম চার নিয়ম ও শিক্ষা-পদ্ধতি

যোগ ও বিয়োগ শেখানোর সময় ছড়ি, পাথরকুঁচি, নুড়ি, হাতের বা পায়ের আঙ্গুলের মাধ্যমে গণনার আশ্রয় নেওয়া উচিত। অবশ্য শিক্ষার্থীদের খুব তাড়াতাড়ি একক, দশক, শতক প্রভৃতি স্থানীয় মানের পরিপ্রেক্ষিতে গণনা কার্য্য সম্পাদন করতে উৎসাহিত করতে হবে।

যোগ : সহজ থেকে জটিল, জানা থেকে অজানা, মূর্ত্ত থেকে বিমূর্ত্ত-নীতির ভিত্তিতেই যোগ প্রক্রিয়া শেখানো উচিত।

(1) এক অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার যোগ :

প্রথম : 3টী পেন্সিল+4টী পেন্সিল=7টী পেন্সিল

দুটী স্কেলের সাহায্যে : 3 সেমি+4 সেমি=7 সেমি

তাহলে $3+4=7$

(2) **10-এর কম অঙ্কবিশিষ্ট যৌগিক সংখ্যার যোগের** সময় প্রথম এমন যৌগিক সংখ্যা নিতে হবে যাদের যোগফল 10-এর বেশী হবে না ; তবে পরে 10-এর বেশী যোগফল হবে এমন যৌগিক সংখ্যাও গ্রহণ করতে হবে।

উদা : (1)

টা.	প.
6	2
4	3

(2)

দশক	একক
5	2
4	3

(3

দশক	একক
5	6
	7

যোগ শেখানোর বিভিন্ন ধাপ :

(১) পুঁতির মালা, Abacus, মার্বেল, বল, পেন্সিল প্রভৃতির মাধ্যমে মূর্ত বস্তুর গণনার মাধ্যমে যোগফল নির্ণয় করতে শেখাতে হবে।

(২) ছবি দেখিয়ে যেমন 3 টী লাল ফুল ও 2টি সাদা ফুল এঁকে শিক্ষার্থীদের গুণতে বলা হবে।

(৩) তারপর বিন্দু, রেখা, বৃত্ত প্রভৃতি রেখাচিত্রের সাহায্যে গণনা ও যোগফল শেখাতে হবে।

(৪) তথ্যগুলি যোগ চিহ্নযুক্ত ক'রে তলায় তলায় বা পাশাপাশি যোগ করতে শেখাতে হবে।

(৫) সমস্যার সমাধানে তথ্যগুলি প্রয়োগ করতে শেখাতে হবে।

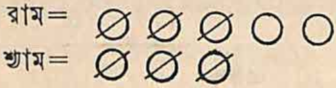
বিয়োগ : বিয়োগ এর অর্থ ই হ'ল বিয়োজন অর্থাৎ সংখ্যার পৃথকীকরণ বা একটি সংখ্যার থেকে আর একটী সংখ্যা গ্রহণ। **যোগের সঙ্গে সঙ্গেই বিয়োগ শেখানো উচিত।** দৈনন্দিন কাজের নানা সমস্যার মধ্য দিয়েই বিয়োগ অঙ্কের সঙ্গে পরিচয় ঘটাতে হবে। **কাজের ভিতর দিয়ে পরিচয়ের পর মূর্ত্ত বস্তু নিয়ে নাড়াচাড়া করে শিশু বিয়োগের চর্চা করবে।** দোকান দোকান খেলা, তেঁতুল বীচি, ছোট ছোট কাঠি প্রভৃতি নানা খেলার জিনিস নিয়ে খেলার মধ্য দিয়ে শিক্ষার্থীরা ছোট ছোট বিয়োগ করবে।

মূর্ত্ত জিনিষের মাধ্যমে বিয়োগ :

(1) রামের 5টি মার্বেল ছিল কিন্তু সে তারমধ্যে 3টি হারিয়ে ফেলল। তার কাছে আর কটী মার্বেল রইল ?



(2) রামের 5টী এবং শ্যামের 3টী মার্বেল আছে। শ্যামের চেয়ে রামের কয়টী মার্বেল বেশী আছে ?



(3) শ্যামের 3টী মার্বেল আছে ; আর কতগুলি মার্বেল হলে তার 5টী মার্বেল হবে ?

তারপর বিমূর্ত সংখ্যা নিয়ে বিয়োগ শেখাতে হবে, যার পদ্ধতি সাধারণত তিন রকমের :

(1) Decomposition Method (**ভেঙ্গে নেওয়ার প্রণালী**)

423 থেকে 157 বিয়োগ করতে হ'লে

$423 = 400 + 20 + 3 = 300 + 110 + 13$

$157 = 100 + 50 + 7 = 100 + 50 + 7$

$200 + 60 + 6 = 266$

এখানে 3 থেকে 7 বিয়োগ করা যায় না। সেজন্য 2 দশকের থেকে 1 দশক ভেঙ্গে নিয়ে 3-এর সঙ্গে যুক্ত করে হ'ল 13। 13 থেকে 7 বিয়োগ করলে হয় 6। এখন 2 দশকের জায়গায় রইল 1 দশক। এখন 1 দশক থেকে 5 দশক বিয়োগ করা যায় না তাই 4 শতক থেকে 1 শতক অর্থাৎ 10 দশক ভেঙ্গে নিয়ে 1 দশকের সঙ্গে যুক্ত করে হ'ল 11 দশক বা 110। 11 দশক থেকে 5 দশক বিয়োগ করে হ'ল 6 দশক বা 60। এখন 4 শতক-এর জায়গায় রইল 3 শতক বা 300। 3 শতক থেকে 1 শতক বিয়োগ করলে রইল 2 শতক বা 200। সুতরাং 423 থেকে 157 বিয়োগ করলে বিয়োগফল হ'বে (200+60+6) বা 266।

(2) **সমান সংখ্যার যোগ করার পদ্ধতি (The method of Equal Additions) :**

423 থেকে 157 বিয়োগ

$$\begin{array}{l} 423=400+20+3=400+120+13 \\ 157=100+50+7=200+\ \ 60+\ \ 7 \\ \hline \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 200+\ \ 60+\ \ 6=266 \end{array}$$

এখানে আমরা 3 থেকে 7 বিয়োগ করতে পারি না। তাই 3-এর সঙ্গে 10 যোগ করে 13 থেকে 7 বিয়োগ ক'রে হ'ল 6। যে 10, 3-এর সঙ্গে যোগ করা হয়েছে সেই 10 কে 50 এর সঙ্গে যুক্ত ক'রে হ'ল 60। কিন্তু 20 থেকে 60 বিয়োগ করা যায় না। তাই 20 বা 2 দশকের সঙ্গে 1 শতক বা 100 যোগ করে 120 থেকে 60 বিয়োগ করে হ'ল 60। 20-র সঙ্গে যে 100 যোগ করা হয়েছে সেই 100, 100-এর সঙ্গে যুক্ত হ'য়ে হ'ল 200। 400 থেকে 200 বিয়োগ ক'রে হ'ল 200। সুতরাং নির্ণেয় বিয়োগফল হ'ল (200+60+6) বা 266।

(3) **পুরণকারী যোগ পদ্ধতি (Complimentary Addition method) :**

$$\begin{array}{lccc} 423=400+20+3 & 4 & 12 & 13 \\ 157=100+50+7 & 1 & 5 & 7 \\ \hline 200+60+6\ = & 2 & 6 & 6 \end{array}$$

এই নিয়মকে যোগ এর দ্বারা বিয়োগ করার পদ্ধতিও বলা চলে। এখানে 3 থেকে 7 বিয়োগ করলে কত হয় তা না বলে বলা হয় 7-এর সঙ্গে কত যোগ

করলে 3 (অর্থাৎ 13) হবে। তেমনি 5-এর সঙ্গে 13-এর 1, যোগ করলে হয় 6 এবং 6-এর সঙ্গে কত যোগ করলে 2 (অর্থাৎ 12) হবে। আবার 12-এর 1, এর সঙ্গে 1 যোগ করলে হয় 2। 2-এর সঙ্গে কত যোগ করলে 4 হবে। এই হ'ল পূরণকারী যোগ পদ্ধতি।

Dr. Ballard-এর মতে সমান সংখ্যা যোগ করার পদ্ধতিটাই হ'ল দ্রুততা ও নিভূর্লতার দিক থেকে নির্ভরযোগ্য। তবে শিক্ষকদের কাছে ভেঙ্গে নেওয়ার প্রণালীটাই হ'ল সহজ।

গুণন :

কয়েকটী সমান সংখ্যার সংক্ষিপ্ত যোগকেই বলা হয় গুণন।

যেমন : 2×5 অর্থই হ'ল

$2+2+2+2+2=2\times5=10$

বা, $5+5=5\times2=10$

তাই 2×5 বা $5\times2=10$

গুণ করতে গেলে নামতার তালিকাটি মনে রাখা দরকার। এই নামতা শিশুরা তৈরী করবে নিজেরা বার বার একটি সংখ্যা যোগ ক'রে। যেমন :

2 দুবার যোগ করে হয় 4

2 তিনবার ,, ,, ,, 6

2 চারবার ,, ,, ,, 8 ইত্যাদি।

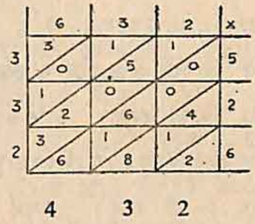
এইভাবে 10 ঘর পর্য্যন্ত নামতা তারা নিজেরাই তৈরী করবে। বার বার তালিকাটী ব্যবহার করলেই সে নিজে নিজেই গুণ শিখতে পারবে।

গুণন তালিকা :

১	১	২	৩	৪	৫	৬	৭	৮	৯	১০
২	২	৪	৬	৮	১০	১২	১৪	১৬	১৮	২০
৩	৩	৬	৯	১২	১৫	১৮	২১	২৪	২৭	৩০
৪	৪	৮	১২	১৬	২০	২৪	২৮	৩২	৩৬	৪০
৫	৫	১০	১৫	২০	২৫	৩০	৩৫	৪০	৪৫	৫০
৬	৬	১২	১৮	২৪	৩০	৩৬	৪২	৪৮	৫৪	৬০
৭	৭	১৪	২১	২৮	৩৫	৪২	৪৯	৫৬	৬৩	৭০
৮	৮	১৬	২৪	৩২	৪০	৪৮	৫৬	৬৪	৭২	৮০
৯	৯	১৮	২৭	৩৬	৪৫	৫৪	৬৩	৭২	৮১	৯০
১০	১০	২০	৩০	৪০	৫০	৬০	৭০	৮০	৯০	১০০

গুণ করার পদ্ধতি ঃ

প্রণালী (1) 632×526



এখানে প্রত্যেকটি ঘরে গুণ ক'রে কর্ণেরদুই পাশে গুণফল লিখে শেষে কোণাকুণি ভাবে প্রত্যেক কর্ণের এক পাশের সংখ্যাগুলি যোগ করলেই নির্ণেয় গুণফল পাওয়া যাবে। এখানে $632 \times 526 = 332432$

প্রণালী (2)

$$\begin{array}{r} 547 \\ \times 382 \\ \hline 1094 \\ 43760 \\ 164100 \\ \hline 208954 \end{array}$$

547কে 382 বার যোগ করাই হ'ল 547×382।

এখন $382 = 300 + 80 + 2$

সুতরাং প্রথমে 2 বার যোগ, তারপর 80 বার যোগ এবং শেষে 300 বার যোগ করে তাদের সমষ্টিই হবে নির্ণেয় গুণফল। শিক্ষার্থীরা জানে যে, কোন সংখ্যাকে 10 বার যোগ করলে অর্থাৎ 10 দিয়ে গুণ করলে সংখ্যাটির ডানদিকে একটি 0 (শূন্য) বসে। একইভাবে 100 দিয়ে গুণ করলে ডানদিকে 00 দুটি (শূন্য) বসে। আরোহী পদ্ধতিতে এই নিয়মটি আয়ত্ত করানোর পর শিক্ষার্থীরা প্রণালীটি সহজেই অনুসরণ করতে পারবে।

যেমন,

$$\begin{array}{rcl} 547 \times 2 & = & 1094 \ \ldots(1) \\ 547 \times 80 & = & 43760 \ \cdots(2) \\ 547 \times 300 & = & 164100 \ \cdots(3) \\ \hline \therefore \ 547 \times 382 & = & 208954 \end{array}$$

এখানে দেখা যাচ্ছে (2) ও (3) এ ডানদিকের শূন্যগুলি বাদ দিলেও গুণফলের তারতম্য হয় না। তাই দ্রুত গুণ করার জন্য ঐ গুলি বাদ দিয়ে গুণ করার অভ্যাস করাতে হবে।

প্রণালী (3)

324×231

$$\begin{array}{l} 324 \\ \times 231 \\ \hline 648 \\ 972 \\ 324 \\ \hline 74844 \end{array}$$

এখানে গুণকের প্রথম অংক দিয়ে গুণ সুরু করা হয়। এই প্রণালীতে গুণ অভ্যাস করালে শিক্ষার্থীদের ভুল হবার সম্ভাবনা কম থাকে। এটি আধুনিক পদ্ধতি।

ভাগ ঃ গুণন প্রক্রিয়ার বিপরীত হ'ল ভাগ প্রক্রিয়া। গুণ যেমন বার বার যোগ, ভাগ ও সেইরকম বার বার বিয়োগ।

প্রথমে নানারকম কাজ ও খেলার মধ্য দিয়ে শিক্ষার্থীরা ভাগ সম্বন্ধে জ্ঞান লাভ করবে। প্রথমে স্থরু হবে অভিজ্ঞতার ভিত্তিতে, তারপর মূর্ত্ত জিনিস দিয়ে ভাগ সম্পর্কে ধারণা দিতে হবে। যান্ত্রিকতা থেকে শিশুদের মুক্ত রাখতে হবে। তাই স্থরু করতে হবে প্রথমে ছোট সংখ্যা দিয়ে। ভাগ যে বার বার বিয়োগ, সেটা স্পষ্ট করে বুঝিয়ে দিতে হবে। যেমন 25 জন ছাত্রী আছে। একটি বেঞ্চিতে 5 জন ছাত্রী বসতে পারে। বসবার জন্য ছাত্রীদের 5 জন ক'রে দল ভাগ করতে হবে। তাহলে কয়টি দল হবে?

```
 25
 −5 = 1 দল  ⎫
 20         ⎪
 −5 = 1 দল  ⎪
 15         ⎪
 −5 = 1 দল  ⎬  5 দল
 10         ⎪
 −5 = 1 দল  ⎪
  5         ⎪
 −5 = 1 দল  ⎭
  ×
```

এইভাবে শিক্ষার্থীরা জানবে 25কে 5 দিয়ে ভাগ করলে ভাগফল হয় 5। এরপর ভাজ্য, ভাজক ও ভাগফল সম্পর্কে ধারণা দিতে হবে। বাস্তব অভিজ্ঞতার ভেতর দিয়ে ভাগশেষ সম্পর্কে ধারণা দিতে হবে।

ভাগ করার পদ্ধতি ঃ

ভাগ করার দুটী পদ্ধতি প্রচলিত ঃ

(১) **সাধারণ নিয়ম ঃ—5267 কে 62 দ্বারা ভাগ**

```
62 ) 5247 ( 84
     496
     ----
      287
      248
      ---
       39
```

এখানে ভাজক = 62, ভাজ্য = 5247 ; ভাজক-এর প্রথম অংক অর্থাৎ 6, ভাজ্যের প্রথম দুটি অংক অর্থাৎ 52 এর মধ্যে কতবার যায় বা 52 থেকে কতবার 6 বিয়োগ করা যায় তা দেখতে হবে। 52 থেকে 6 বিয়োগ করা যায় 8 বার।

কাজেই 524 এর মধ্যে 62 যায় 8 বার। গুণ ক'রে দেখা গেল $62 \times 8 = 496$। [যদি এই গুণফল 524 থেকে বেশী হ'ত তাহলে ভাগফলে 8 থেকে 1 কম অর্থাৎ 7 নিতে হ'ত] এখানে 8 বারই যাবে। ভাগফল হিসাবে প্রথমে 8 লিখতে হবে [ভাগফল ভাজকের বিপরীত দিকে বা ভাজ্যের মাথায়ও লিখতে পারা যায়]। তারপর 524 থেকে 496 বিয়োগ করলে 28 হয় এবং 5247 থেকে 7, 28-এর ডানদিকে লিখে সংখ্যাটি দাড়ায় 287। এখন 287কে 62 দিয়ে উপরোক্ত উপায়ে ভাগ করলে ভাগফল 4 হয় এবং এই 4কে প্রথম ভাগফল 8-এর পাশে বসাতে হয়। ভাগফল দাঁড়ায় 84 এবং $62 \times 4 = 248$। 287 থেকে 248 বিয়োগ করলে হয় 39। এই 39 হ'ল নির্ণেয় ভাগশেষ।

(২) উৎপাদকের সাহায্যে

$2995 \div 12$

এখানে ভাজক 12 এর উৎপাদক $= 2 \times 2 \times 3$

সুতরাং ভাজক 2995কে এইভাবে 12 দ্বারা ভাগ করা যায় :

2|2995
2|1497 … 1 অবশিষ্ট
3|748 … 1 অবশিষ্ট (প্রতিদলে 2)
249 … 1 অবশিষ্ট (প্রতিদলে 4)

ভাগশেষ $= 1 + 1 \times 2 + 1 \times 4$

$= 1 + 2 + 4 = 7$

ভাগফল $= 249$

এখানে প্রথম ভাগফলটি হ'ল 1497টি 2 এর দল, একে 2 দ্বারা ভাগ করলে অবশিষ্ট থাকে 1 ; কিন্তু 1497 এর প্রত্যেকটি 2 এর দল। সুতরাং এই অবশিষ্ট 1টির প্রত্যেকটি 2 এর দল। অর্থাৎ প্রকৃত অবশিষ্ট $1 \times 2 = 2$। আবার দ্বিতীয় ভাগফলটি 748টি হ'ল 2 এর দল এবং সেখানে অবশিষ্ট 1টি হ'ল 1টি 2×2 বা 4 এর দল।

সুতরাং প্রকৃত ভাগশেষ হ'ল $= 4 \times 1 = 4$

মোট ভাগশেষ হ'ল $= 4 + 2 + 1 = 7$

ভাগশেষ = ভাজক × ভাগফল + ভাগশেষ, এই নিয়মটি শিক্ষার্থীদের উপলব্ধি করাতে হবে।

সামান্য ভগ্নাংশ (Vulgur fraction) :

আদিম যুগে মানুষেরা যখন প্রথম প্রয়োজনের তাগিদে গুণতে শিখল তখন তারা স্বাভাবিক সংখ্যাই ব্যবহার করত। কিন্তু সভ্যতার ক্রমবিকাশ, **জীবন-যাত্রার জটিলতার পরিপ্রেক্ষিতে ভাগাভাগি করার জন্য হিসেব-নিকেশের মধ্যে স্থান পেলো ভগ্নাংশ।** জানা যায়, **মিশরবাসীরাই** নাকি খ্রীঃ পূঃ 1550 সাল নাগাদ **প্রথম ভগ্নাংশের ব্যবহার সুরু করে।**

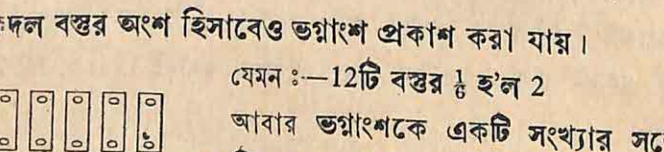
ভগ্নাংশ ও তার শিক্ষাপদ্ধতি

আমাদের দেশে বিখ্যাত গণিতজ্ঞ **ব্রহ্মগুপ্ত ও ভাস্করাচার্য্য** ভগ্নাংশ সম্পর্কে অনেক নিয়ম তৈরী করেন। তাঁরা ভগ্নাংশ লিখত : $\frac{2}{3}$। তবে মাঝের রেখাটি দিতে সুরু করেন আরববাসীরা অর্থাৎ $\frac{2}{3}$।

ভগ্নাংশের অর্থই হ'ল ভগ্ন অংশ। সুতরাং কোন রাশি বা বস্তুর ভগ্ন অংশের সঙ্গে শিক্ষার্থীদের প্রথমে পরিচিত করতে হবে।

ভগ্নাংশ সম্পর্কে ধারণা শিশুরা অজ্ঞাতে ছোটবেলা থেকেই পায়। সে জানে আধখানা রুটি, আধখানা বিস্কুট, আধখানা রসগোল্লা কি ? কিংবা যখন দুই বা তিন ভাই-বোনকে কোন একটা জিনিস সমান 2 ভাগ কি 4 ভাগ করে নিতে বলেন—তখন অজ্ঞাতে তারা ভগ্নাংশের ধারণা করে নেয়।

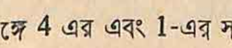
শিক্ষার্থীদের ভগ্নাংশের প্রথম ধারণা দিতে গেলে মূর্ত বস্তুর সাহায্য নিতে হবে। **শ্রেণীকক্ষে সাধারণতঃ কাগজ ভাঁজ করে ভগ্নাংশের ধারণা দিলে শিক্ষা স্পষ্ট হবার সম্ভাবনা থাকে। চিত্রের সাহায্যেও ভগ্নাংশের ধারণা দেওয়া যেতে পারে।** যেমন :



1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$

একদল বস্তুর অংশ হিসাবেও ভগ্নাংশ প্রকাশ করা যায়।

যেমন :—12টি **বস্তুর $\frac{1}{6}$ হ'ল 2**



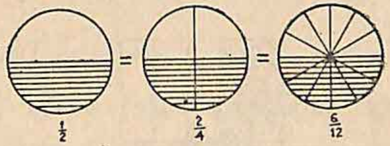
$\frac{1}{6}$

আবার **ভগ্নাংশকে একটি সংখ্যার সঙ্গে আর একটি সংখ্যার সম্বন্ধ হিসাবেও প্রকাশ করা হয়।**

যেমন :

$6 \div 12 = 6 : 12 = 2 : 4 = 1 : 2 = \frac{1}{2}$ অর্থাৎ 6 এর সঙ্গে 12 র-যা সম্পর্ক, 2 এর সঙ্গে 4 এর এবং 1-এর সঙ্গে 2-এর তাই সম্পর্ক অর্থাৎ $\frac{1}{2}$।

চিত্রের সাহায্যেও এই ধারণা দেওয়া যেতে পারে।



শিক্ষার্থীদের ভগ্নাংশ সম্পর্কে সঠিক ধারণা দিতে হ'লে ভগ্নাংশের লব ও হর কাকে বলে তা বোঝানো দরকার। যেমন : তাদের বলতে হবে যে, একটা পুরো বস্তুকে যতগুলো সমান অংশে ভাগ করা হয় সেই সমান অংশের সংখ্যাকে বলা হয় **হর**। আর হর থেকে যতগুলো অংশ নেওয়া হয় সেই সংখ্যাকে বলা হয় **লব**। সুতরাং ভগ্নাংশের অনুভূমিক রেখাংশের নীচের সংখ্যাকে হর এবং উপরের সংখ্যাকে লব বলে।

যেমন : $\frac{9}{16}$ এর হর$=16$ এবং লব$=9$

পরবর্তী ধাপে ভগ্নাংশের প্রকারভেদ শেখাতে হবে। যেমন :

(1) **প্রকৃত ভগ্নাংশ :** যে ভগ্নাংশের হর লবের চেয়ে বড় সেই ভগ্নাংশ হ'ল প্রকৃত ভগ্নাংশ। যেমন : $\frac{2}{3}$, $\frac{8}{9}$ প্রভৃতি এবং দেখাতে হবে এরা প্রত্যেকেই I এর চেয়ে ছোট।

(2) **অপ্রকৃত ভগ্নাংশ :** যে ভগ্নাংশের হর লবের চেয়ে ছোট সেই ভগ্নাংশকে অপ্রকৃত ভগ্নাংশ বলে। যেমন : $\frac{8}{5}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{6}$ প্রভৃতি এবং এরা প্রত্যেকেই I এর চেয়ে বড়।

(3) **মিশ্রভগ্নাংশ : একটি পূর্ণসংখ্যা ও প্রকৃত ভগ্নাংশের সমষ্টিই হ'ল মিশ্র ভগ্নাংশ।**

অপ্রকৃত ভগ্নাংশ যেমন $\frac{8}{5}$ বলতে বোঝায় 8 অংশের মধ্যে 5 অংশে একটা পুরো বস্তু এবং 3 অংশে বস্তুটার $\frac{3}{5}$ অংশ ;

অর্থাৎ $\frac{8}{5}=1$ পূর্ণ $\frac{3}{5}=1\frac{3}{5}$

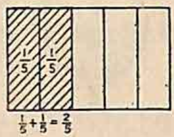
অপ্রকৃত ভগ্নাংশকে এইভাবে প্রকাশ করলে মিশ্র ভগ্নাংশে পরিণত হয়।

তেমনি, $2\frac{1}{4}$, $3\frac{2}{3}$ প্রভৃতি মিশ্র ভগ্নাংশ।

পরবর্তী ধাপে ক্রমে ক্রমে ভগ্নাংশের যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ শেখাতে হবে।

যোগ ঃ প্রথমে চিত্রের সাহায্যে যোগ শেখানো ঃ

যেমন ঃ (1) $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$ [সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশ]



(2) $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ [ভিন্ন হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশ]



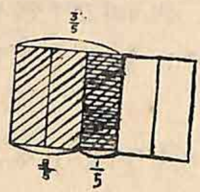
এখানে $\frac{1}{3}$ ও $\frac{1}{4}$ যোগ দেওয়া সম্ভব হচ্ছে না বলে $\frac{1}{3}$ অংশকে সমান 4 ভাগ এবং বাকী 2টি $\frac{1}{3}$ অংশের প্রত্যেকটিকে সমান 4 ভাগ করা হয়েছে অর্থাৎ সমস্ত চিত্রটি সমান 12 ভাগে বিভক্ত হয়েছে।

$\therefore$ $\frac{1}{3}$ অংশ $=\frac{4}{12}$ এবং $\frac{1}{4}$ অংশ $=\frac{3}{12}$

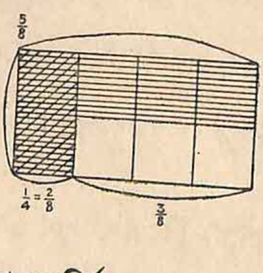
$\therefore$ $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{7}{12}$

বিয়োগ ঃ

যেমন ঃ (1) $\frac{3}{5}-\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$ [সাধারণ হর বিশিষ্ট]

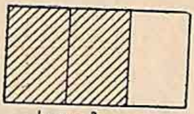


(2) $\frac{5}{8}-\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$ [ভিন্ন হরবিশিষ্ট]



এইভাবে ভগ্নাংশের যোগ-বিয়োগের বিভিন্ন উদাহরণের মাধ্যমে শিক্ষার্থীরা নিজে নিজেই সিদ্ধান্ত করবে যে, বিভিন্ন হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশের যোগ-বিয়োগ করতে হ'লে, হরগুলিকে একই সংখ্যায় পরিণত করতে হবে। তার জন্য প্রয়োজন হরগুলির ল. সা গু নির্ণয় করা ; এবং তার পরিপ্রেক্ষিতে লবগুলিরও পরিবর্তন করা।

গুণ ঃ এখানে শিক্ষার্থীদের দেখাতে হবে যে ভগ্নাংশের গুণে গুণফল অনেক সময় কমে যায়। ভগ্নাংশের গুণের গুণনীয়ক যদি পূর্ণ সংখ্যা হয় তাহলে গুণফল বেড়ে যায় সাধারণ গুণন নিয়ম অনুযায়ী।



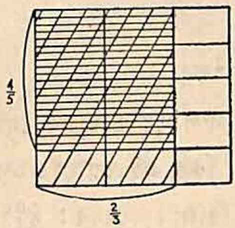
$\frac{1}{3}\times 2=\frac{2}{3}$

যেমন ঃ (1) $\frac{1}{3}\times 2=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

স্বাভাবিক সংখ্যা দিয়ে ভগ্নাংশকে গুণ করতে হ'লে লবকে ঐ সংখ্যা দিয়ে গুণ করলেই গুণফল পাওয়া যায়।

(2) $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$

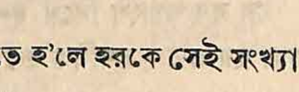
এখানে একটি ক্ষেত্রকে 3 ভাগ ক'রে 2 ভাগ নিতে হবে এবং তারপর $\frac{2}{3}$ অংশ ক্ষেত্রকে 5 ভাগ করে তার 4 ভাগ নিতে হবে।



$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$

উপরোক্ত উদাহরণের মাধ্যমে **শিক্ষার্থীরা সিদ্ধান্ত করবে ভগ্নাংশের গুণ করতে হলে হরের সংগে হরের এবং লবের সঙ্গে লবের গুণ করতে হবে।**

ভাগ ঃ (1) $\frac{5}{9}\div 2$



এখানে একটী ক্ষেত্রকে লম্বালম্বি সমান 9 ভাগ ক'রে তার 5 ভাগ নেওয়া হয়েছে এবং তারপর $\frac{5}{9}$ অংশকে সমান দুভাগ করে 1 ভাগ নেওয়া হয়েছে।

$\therefore\ \frac{5}{9}\div 2=\frac{5}{9\times 2}=\frac{5}{18}$

ভগ্নাংশকে স্বাভাবিক সংখ্যা দিয়ে ভাগ করতে হ'লে হরকে সেই সংখ্যা দিয়ে গুণ করলেই নির্ণেয় ভাগফল পাওয়া যায়।

(2) $\frac{5}{9}\div\frac{3}{4}$

আমরা আগে দেখেছি, $\frac{5}{9}\div 2=\frac{5}{9\times 2}=\frac{5}{18}$

তাহলে $\frac{5}{9} \div \frac{3}{4} = \frac{5}{9 \times \frac{3}{4}} = \frac{5}{\frac{27}{4}}$

$$= \frac{5 \times 4}{\frac{27}{4} \times 4} = \frac{5 \times 4}{27} = \frac{20}{27}$$

শিক্ষার্থীদের লক্ষ্য করতে বলা হবে যে,

$$\frac{5}{9} \div \frac{3}{4} = \frac{5}{9} \times \frac{4}{3} = \frac{20}{27}$$

এথেকে **শিক্ষার্থীরা সিদ্ধান্তে আসবে যে ভগ্নাংশকে ভগ্নাংশ দিয়ে ভাগ করলে প্রাপ্ত ভগ্নাংশের লব হয় ভাজ্য ভগ্নাংশের লবের এবং ভাজক ভগ্নাংশের হরের গুণফল আর প্রাপ্ত ভগ্নাংশের হর হয় ভাজ্য ভগ্নাংশের হরের এবং ভাজক ভগ্নাংশের লবের গুণফল।**

দশমিক ভগ্নাংশ (Decimal Fraction) :

দশমিক ভগ্নাংশ ও তার শিক্ষা পদ্ধতি

স্বাভাবিক সংখ্যা যখন মানুষের সংখ্যা সম্পর্কীয় প্রয়োজন মেটাতে পারলো না তখনই সুরু হলো ভগ্নাংশের ব্যবহার। কিন্তু এই ভগ্নাংশও ক্রমে ক্রমে ব্যবহারের ক্ষেত্রে জটিলতা দেখা দিলো। যেমন : $\frac{5968352}{950732413}$ ভগ্নাংশটি ব্যবহার করা বেশ বিরক্তিকর। মিশরবাসীরা এই জটিলতা দূর করার জন্য হরকে 43 এবং 43 এর গুণিতকরূপে প্রকাশ করলো; যেমন, $\frac{1}{43}$, $\frac{1}{86}$, $\frac{1}{129}$...ইত্যাদি। ব্যাবিলনবাসীরা $\frac{1}{60}$, $\frac{1}{120}$, $\frac{1}{180}$, $\frac{1}{240}$... প্রভৃতি প্রকাশ করলো। ক্রমে **হিন্দু ও আরব গণিতজ্ঞরা** হরকে 10, 100, 1000...প্রভৃতিতে প্রকাশ করার রীতি উদ্ভাবন করলো। এই পদ্ধতি আর সমস্ত পদ্ধতিকে অতিক্রম করে আমাদের **এক বিশেষ ধরণের ভগ্নাংশের ব্যবহার শেখালো যার নাম দশমিক ভগ্নাংশ।**

যে সব ভগ্নাংশ দিয়ে দশাংশ, শতাংশ, সহস্রাংশ... প্রভৃতি প্রকাশ করা হয় তাকে দশমিক ভগ্নাংশ বলে।

আগে কিন্তু বিভিন্ন দেশে বিভিন্ন ভাবে দশমিককে লেখা হ'ত। যেমন 6 একক 3 দশাংশ 5 শতাংশ 8 সহস্রাংশকে একত্রে কোন দেশে লেখা হ'ত : 6 3′ 5″ 8 বা অন্য কোন দেশে লেখা হ'তো $\frac{6}{3}$' 5" 8"' বা 6 | $\underline{358}$ বা 6_{358}।

কিন্তু বর্তমানে একে প্রকাশ করা হয় 6·358 হিসাবে।

দশমিক ভগ্নাংশ যদি দশমিক চার্টের মাধ্যমে শিক্ষার্থীদের কাছে উপস্থাপন করা যায় তাহলে দশমিক ভগ্নাংশ সম্পর্কে ধারণা তাদের সুদৃঢ় হতে পারে।

দশমিক চার্ট

	সহস্র	শতক	দশক	একক	$\frac{1}{10}$ দশাংশ	$\frac{1}{100}$ শতাংশ	$\frac{1}{1000}$ সহস্রাংশ
$37 \times 1 = 37$			3	7			
$37 \times 10 = 370$		3	7	0			
$37 \times 100 = 3700$	3	7	0	0			
$37 \div 10 = 3{\cdot}7$				3	7		
$37 \div 100 = {\cdot}37$					3	7	
$37 \div 1000 = {\cdot}037$					0	3	7

সংখ্যার স্থানীয় মানের নিয়ম অনুযায়ী 37কে 10 দিয়ে গুণ করলে 370, 100 দিয়ে 3700 হয় অর্থাৎ সংখ্যাটি বাঁদিকে একঘর সরে যায়। আর 10 দিয়ে ভাগ করার সময় দেখা যাচ্ছে যে সংখ্যাটী ডানদিকে একঘর সরে যাচ্ছে অর্থাৎ 37কে 10 দিয়ে ভাগ করার সময় 3 বসেছে এককের ঘরে এবং 7 বসেছে দশাংশের ঘরে। গণিতে এই সংখ্যাটী দশমিক বিন্দুর সাহায্যে লেখা হয় যেমন 3·7। অনুরূপ ভাবে $37 \div 100 = {\cdot}37$ এবং $37 \div 1000 = {\cdot}037$ লিখতে হবে।

এই থেকে শিক্ষার্থীকে দেখাতে হবে :

$\frac{1}{10} = {\cdot}1$, $\frac{1}{100} = {\cdot}01$, $\frac{1}{1000} = {\cdot}001$........ ইত্যাদি।

আবার $4 = 4{\cdot}0$, কারণ $4{\cdot}0 = 4 \times 1 + 0 \times \frac{1}{10} = 4$

$4{\cdot}00$, কারণ $4{\cdot}00 = 4 \times 1 + 0 \times \frac{1}{10} + 0 \times \frac{1}{100} = 4.$

সুতরাং $4 = 4{\cdot}0 = 4{\cdot}00 = 4{\cdot}000 \cdots\cdots$

অর্থাৎ যে কোন স্বাভাবিক সংখ্যাকে এইভাবে প্রকাশ করা হয়।

আবার $4{\cdot}0350 = 4{\cdot}035$,

কারণ, $4{\cdot}0350 = 4 \times 1 + 0 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{100} + 5 \times \frac{1}{1000} + 0 \times \frac{1}{1000}$

$= 4 \times 1 + 3 \times \frac{1}{100} + 5 \times \frac{1}{1000} \cdots\cdots\cdots (1)$

এবং $4{\cdot}035 = 4 \times 1 + 0 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{100} + 5 \times \frac{1}{1000}$

$= 4 \times 1 + 3 \times \frac{1}{100} + 5 \times \frac{1}{1000} \cdots\cdots (2)$

$\therefore \ (1) = (2)$

এরপর দশমিক পড়বার নিয়ম সম্পর্কে শিক্ষার্থীদের ধারণা দিতে হবে। যেমন :

·8 কে পড়তে হবে ''আট দশাংশ'' বা "দশমিক আট।"

·72 কে পড়তে হবে "সাত দশাংশ দুই শতাংশ" বা ''দশমিক সাত দুই''।

·053কে পড়তে হবে "শূন্য দশাংশ পাঁচ শতাংশ তিন সহস্রাংশ" বা ''দশমিক শূন্য পাঁচ তিন।"

25·1348কে পড়তে হবে ''পঁচিশ দশমিক এক তিন চার আট।''

দশমিকের প্রকার ভেদ :

(1) **বিশুদ্ধ দশমিক :** যে দশমিক এর মান 1 এর চেয়ে ছোট তাকে বিশুদ্ধ দশমিক বলে। যেমন 0·83, 0·3605 প্রভৃতি।

(2) **মিশ্র দশমিক :** যে দশমিক এর মান 1 এর চেয়ে বড় সেই সব দশমিককে মিশ্র দশমিক বলে যেমন, 1·76, 12·054 প্রভৃতি।

এগুলি আরোহী পদ্ধতির মাধ্যমে সিদ্ধান্তে আসা বাঞ্ছনীয়।

দশমিক যোগ ও বিয়োগ :

দশমিকের যোগ ও বিয়োগের সময় স্থানীয়মানের ওপর ভিত্তি ক'রে অঙ্কগুলি সাজাতে হবে যেমন দশাংশ স্থানের অঙ্কগুলো একই স্তম্ভে, শতাংশ স্থানের অঙ্কগুলো একই স্তম্ভে···ইত্যাদি।

এভাবে সাজালে দেখা যাবে দশমিক বিন্দুগুলো একই স্তম্ভে এবং পূর্ণ অংশের সংখ্যাগুলোও স্থানীয় মান অনুযায়ী রয়েছে। এরপর স্বাভাবিক সংখ্যার যোগ ও বিয়োগের নিয়ম অনুযায়ী যোগ ও বিয়োগ করতে হবে।

প্রথম চারিনিয়ম ও দশমিক ভগ্নাংশ

দশমিকের গুণ :

দশমিকের ক্ষেত্রে 10, 100 বা 1000……গুণ করলে প্রত্যেক অঙ্কে স্থানীয় মান যথাক্রমে 10, 100 বা 1000……গুণ হয়ে যাবে। যেমন :

সমাধান :

(1) $25{\cdot}143 \times 10$
$= 251{\cdot}43$

ব্যাখ্যা :

(1) $25{\cdot}143 \times 10$

$$= (2 \times 10 + 5 \times 1 + 1 \times \tfrac{1}{10} + 4 \times \tfrac{1}{100} + 3 \times \tfrac{1}{1000}) \times 10$$
$$= 2 \times 100 + 5 \times 10 + 1 \times 1 + 4 \times \tfrac{1}{10} + 3 \times \tfrac{1}{100}$$
$$= 200 + 50 + 1 + {\cdot}4 + {\cdot}03$$
$$= 251{\cdot}43$$

(2) $37{\cdot}37 \times 1000$	(2) $37{\cdot}37 \times 1000$
$= 37370$	$= (3\times10+7\times1+3\times\frac{1}{10}+7\times\frac{1}{100})\times1000$
	$=3\times10000+7\times1000+3\times100+7\times10$
	$=30000+7000+300+70$
	$=37370$

উপরোক্ত উদাহরণের মাধ্যমে শিক্ষার্থীরা নিজে নিজেই দশমিক বিন্দুর স্থান পরিবর্তনের নিয়ম শিখবে।

দশমিককে স্বাভাবিক সংখ্যা দিয়ে গুণ :

এখানে প্রদত্ত দশমিকে দশমিক বিন্দুর পর যতস্থান থাকবে প্রাপ্ত গুণফলে যেন ডান দিক থেকে ঠিক সেইকটী স্থান ছেড়ে দশমিক বিন্দু বসে। যেমন :

$35{\cdot}289 \times 125 = ?$

সমাধান	ব্যাখ্যা
$35{\cdot}289$	$35{\cdot}289\times125$
125	$=(3\times10+5\times1+2\times\frac{1}{10}+8\times\frac{1}{100}+9\times\frac{1}{1000})\times125$
176445	$=3\times10\times125+5\times1\times125+\frac{2\times125}{10}+\frac{8\times125}{100}$
$70578\times$	
$35289\times\times$	$+\frac{9\times125}{1000}$
$4411{\cdot}125$	$=3750+625+\frac{250}{10}+\frac{1000}{100}+\frac{1125}{1000}$
	$=3750+625+25+10+1{\cdot}125$
	$=4511{\cdot}125$

দশমিককে দশমিক দিয়ে গুণ :

প্রথমে স্বাভাবিক সংখ্যার গুণের মত গুণফল নির্ণয় ক'রে উভয় দশমিকের দশমিক বিন্দুর ডানদিকে মোট যত স্থান আছে গুণফলে ডানদিক থেকে তত স্থান ছেড়ে দশমিক বিন্দু বসাতে হবে।

যেমন : $5{\cdot}08 \times 1{\cdot}25 = ?$

সমাধান | ব্যাখ্যা

$$\begin{array}{r} 5{\cdot}08 \\ 1{\cdot}25 \\ \hline 2540 \\ 1016 \\ 508 \\ \hline 6{\cdot}3500 \end{array}$$
$=6{\cdot}35$

$$5{\cdot}08\times1{\cdot}25$$
$$=\left(5+8\times\frac{1}{100}\right)\times\left(1+2\times\frac{1}{10}+5\times\frac{1}{100}\right)$$
$$=5+10\times\frac{1}{10}+25\times\frac{1}{100}+8\times\frac{1}{100}+16\times\frac{1}{1000}+40\times\frac{1}{10000}$$
$$=5+1+\frac{25}{100}+\frac{8}{100}+\frac{16}{1000}+\frac{4}{1000}$$
$$=6+{\cdot}25+{\cdot}08+{\cdot}016+{\cdot}004$$
$$=6{\cdot}350$$
$$=6{\cdot}35$$

দশমিকের ভাগ ঃ

দশমিকের ক্ষেত্রে 10, 100, 1000...........প্রভৃতি দিয়ে ভাগ করলে ভাজ্যের ভাগফল প্রত্যেক অঙ্কের স্থানীয় মান 10, 100, 1000...প্রভৃতি ভাগ হয়ে যাবে। যেমন ঃ $36{\cdot}63\div10=?$

সমাধান | ব্যাখ্যা

$36{\cdot}63\div10$
$=3{\cdot}663$

$$36{\cdot}63\div10$$
$$=(3\times10+6\times1+6\times\tfrac{1}{10}+3\times\tfrac{1}{100})\div10$$
$$=3\times1+6\times\tfrac{1}{10}+6\times\tfrac{1}{100}+3\times\tfrac{1}{1000}$$
$$=3+{\cdot}6+{\cdot}06+{\cdot}003$$
$$=3{\cdot}663$$

দশমিককে স্বাভাবিক সংখ্যা দিয়ে ভাগ করার সময় শুধু লক্ষ্য রাখতে হবে যে, যখন দশাংশ স্থানের অঙ্ক বা দশাংশ স্থানের অঙ্কসহ অন্য অঙ্ক ভাগ করতে হবে তখন ভাগফলে দশমিক বিন্দু বসাতে হবে।

যেমন ঃ $36{\cdot}69\div3=?$

সমাধান | ব্যাখ্যা

$$\begin{array}{l} 3)36{\cdot}69(12{\cdot}23 \\ \underline{3} \\ 6 \\ \underline{6} \\ 6 \\ \underline{6} \\ 9 \\ \underline{9} \\ \times \end{array}$$

$$36{\cdot}69\div3$$
$$=(3\times10+6\times1+6\times\tfrac{1}{10}+9\times\tfrac{1}{100})\div3$$
$$=1\times10+2\times1+2\times\tfrac{1}{10}+3\times\tfrac{1}{100}$$
$$=10+2+{\cdot}2+{\cdot}03$$
$$=12{\cdot}23$$

দশমিককে দশমিক দিয়ে ভাগ করতে হলে প্রথমে **ভাজকের দশমিক বিন্দু ডানদিকে একেবারে শেষে সরিয়ে নিয়ে স্বাভাবিক সংখ্যায় প্রকাশ করতে হয়। তারপর ভাজকের দশমিক বিন্দু যত স্থান ডানদিকে সরে, ভাজ্যের দশমিক বিন্দুকেও ঠিক তত স্থান ডানদিকে সরাতে হয়** এবং **শেষে দশমিককে স্বাভাবিক সংখ্যা দিয়ে ভাগ করার পদ্ধতি অনুযায়ী ভাগ করতে হয়।**

উদা: $16{\cdot}767 \div 8{\cdot}1 = ?$

সমাধান

$16{\cdot}767 \div 8{\cdot}1$

$= 167{\cdot}67 \div 81$

$$\begin{array}{r|l} 81 & 167{\cdot}67 \ (2{\cdot}07 \\ & \underline{162} \\ & \quad 567 \\ & \quad \underline{567} \\ & \quad \times \end{array}$$

ব্যাখ্যা

$16{\cdot}767 \div 8{\cdot}1$

$$= \frac{16{\cdot}767}{8{\cdot}1} = \frac{16{\cdot}767 \times 10}{8{\cdot}1 \times 10}$$

$$= \frac{167{\cdot}67}{81} = 2{\cdot}07$$

মেট্রিক পদ্ধতি : **(Metric system)** এই পদ্ধতি প্রথম গ্রহণ করা হয় 1795 খ্রীষ্টাব্দে 27 শে এপ্রিল ফ্রান্স দেশে। এই পদ্ধতির সুবিধার কথা ভেবেই এখন পৃথিবীর প্রায় সব দেশেই মেট্রিক পদ্ধতি চালু হয়েছে। **প্রকৃতপক্ষে এই পদ্ধতির পরিমাপ দশমিক পদ্ধতির উপর নির্ভরশীল।** ভারতবর্ষে 1957 সালের 1 লা থেকে মেট্রিক পদ্ধতি চালু করা হয়েছে।

দৈর্ঘ্যের মূল একক	মিটার
ওজনের ,, ,,	গ্রাম
ক্ষেত্রফলের ,, ,,	আর (1 বঃ ডেকামি)
আয়তনের ,, ,,	স্টেয়ার (1 ঘন মিটার)
ধারকের ,, ,,	লিটার

ঐ মূল এককগুলোর

1,000 গুণের নাম	কিলো
100 ,, ,,	হেক্টো
10 ,, ,,	ডেকা
$\frac{1}{10}$,, ,,	ডেসি
$\frac{1}{100}$,, ,,	সেন্টি
$\frac{1}{1000}$,, ,,	মিলি

তবে ব্যবহারিক ক্ষেত্রে সাধারণভাবে দৈর্ঘ্যের মূল একক ধরা হয় সেমি; ওজনের ক্ষেত্রে ধরা হয় গ্রাম, ক্ষেত্রফলের ক্ষেত্রে বর্গসেমি এবং ঘনফলের ক্ষেত্রে ঘন সেমি।

বেশী দৈর্ঘ্য পরিমাপের ক্ষেত্রে,

10 কিমি = 1 মিরিয়ামিটার

বেশী ওজনের ক্ষেত্রে

10 কিগ্রা = 1 মিরিয়াগ্রাম
100 কিগ্রা = 1 কুইন্ট্যাল
1000 কিগ্রা = 1 মেট্রিক টন বা টন বলা হয়।

বড় বড় জমির পরিমাপের ক্ষেত্রে

1 বর্গ ডেকামি = 1 আর
1 সেণ্টিয়ার = 1 বর্গমিটার
100 ,, = 1 আর
100 ,, = 1 হেক্টার

মুদ্রার দশমিকিকরণের ক্ষেত্রে দশমিক ভগ্নাংশের পরিপ্রেক্ষিতে লিখন পদ্ধতি শিক্ষার্থীদের সহজভাবে উপস্থাপন করতে হবে। যেমন :

100 পঃ = 1 টাকা = 1·00 টা
50 পয়সা = ·50 টা
25 ,, = ·25 টা
10 ,, = ·10 টা
5 ,, = ·05 টা
1 ,, = ·01 টা ইত্যাদি।

মেট্রিক পদ্ধতিতে ওজন, দৈর্ঘ্য, ক্ষেত্রফল, আয়তন, ধারক এবং দশমিক মুদ্রার এককের উপস্থাপন ও লিখনপদ্ধতি আরোহী পদ্ধতিতে অগ্রসর হওয়াই বাঞ্ছনীয়। মেট্রিক পদ্ধতির সঙ্গে সঙ্গে ব্রিটিশদের বিভিন্ন একক (F.P.S পদ্ধতি), আমাদের প্রাচীন মুদ্রার একক প্রভৃতির সঙ্গে অন্যান্য এককের সম্পর্ক চার্টের মাধ্যমে উপস্থাপন করা উচিত।

গ. সা. গু এবং ল. সা. গু

শিক্ষার্থীদের কাছে প্রথমে উৎপাদক বা গুণনীয়ক এবং গুণিতকের মধ্যে প্রভেদ, মৌলিক ও কৃত্রিম সংখ্যার স্বরূপ ও নির্ণয় পদ্ধতি, বিভাজ্যতা নির্ণায়ক উপায়, জোড় ও বিজোড় সংখ্যার প্রকাশ প্রভৃতি সম্পর্কে বিশদ আলোচনা করতে হবে। তারপর গ. সা. গু এবং ল. সা. গু-র মূল অর্থ কি তা বুঝিয়ে বলতে হবে।

গ. সা. গু ও ল. সা. গু এবং তার শিক্ষণ

এই ল. সা. গু ও গ. সা. গু শেখানোর সময় বিন্যাসতত্ত্ব বা Set Theory-র সাহায্য নেওয়া উচিত। তবে বিন্যাস তত্ত্ব তখনই কার্য্যকরীও ফলপ্রদ হবে যখন সংখ্যার পরিমান অল্প ও ছোট হবে। অন্যান্য ক্ষেত্রে **ভাগপ্রক্রিয়ার মাধ্যমেই উপস্থাপন** করা উচিত।

বিন্যাস তত্ত্বের (Set Theory) মাধ্যমে গ.সা.গু নির্ণয়

উদা. 15, 35 এবং 120-র গ. সা. গু নির্ণয় করতে হবে।

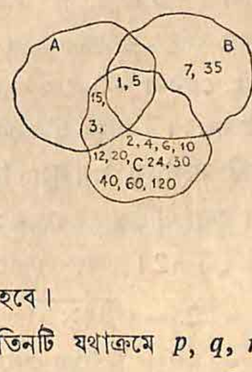
মনে করি A, B, C তিনটি যথাক্রমে p, q, r সংখ্যাগুলির বিন্যাস। তখন $A \cap B \cap C$ হবে p, q, r এর সাধারণ উৎপাদক। যার মধ্যে বৃহত্তম বা গরিষ্ঠ সংখ্যা বা উৎপাদকটি হবে নির্ণেয় গ. সা. গু। এটি উৎপাদক পদ্ধতিরই পরিমার্জিত ও আধুনিক রূপান্তর।

এখানে $A=\{1, 3, 5, 15\}$

$B=\{1, 5, 7, 35\}$

$C=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120\}$

চিত্র :



$\therefore\ A \cap B \cap C=\{1, 5\}$

$\therefore$ নির্ণেয় গ.সা.গু $=5$

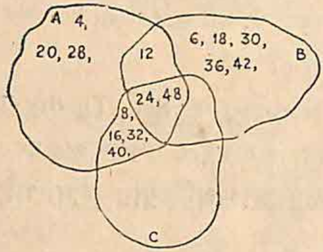
বিন্যাস তত্ত্বের মাধ্যমে ল. সা. গু নির্ণয়

উদা. 4, 6, 8-এর ল. সা. গু নির্ণয় করতে হবে।

p, q, r তিনটি সংখ্যা এবং A, B, C তিনটি যথাক্রমে p, q, r সংখ্যার গুণিতকের বিন্যাস। তখন $A \cap B \cap C$ হবে p, q, r-এর সাধারণ গুণিতক এবং তাদের মধ্যে লঘিষ্ঠ বা ক্ষুদ্রতম গুণিতকটিই হবে নির্ণেয় ল. সা. গু।

এখানে $A=\{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 40, 48...\}$
$B=\{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48 ..\}$
$C=\{8, 16, 24, 32, 40, 48...\}$

চিত্র :



$\therefore \quad A \cap B \cap C=\{24, 48...\}$

$\therefore$ ল. সা. গু $=24$.

বর্গমূল : বর্গমূল শেখানোর আগে শিক্ষার্থীদের একটি নির্দিষ্ট সংখ্যার বর্গ করতে শেখাতে হবে।

যেমন $6\times6=36$ বা 6 এর বর্গ $=36$ বা $6^2=36$ এবং বিপরীতক্রমে $6=\sqrt{36}$। তেমনি $49=7^2$ $\therefore$ $7=\sqrt{49}$, $64=8^2$ $\therefore$ $8=\sqrt{64}$ ইত্যাদি।

বর্গমূল ও তার শিক্ষণ

এইভাবে **আরোহী পদ্ধতির মাধ্যমে শিক্ষার্থীরা বর্গমূল সম্পর্কে ধারণা করতে সক্ষম হবে।**

"এমন একটি সংখ্যা নির্ণয় কর যাকে সেই সংখ্যা দিয়ে গুণ করলে গুণফল হয় 9।" এই প্রশ্নের উত্তরে আমরা একটি সমীকরণ পাই অর্থাৎ $x^2=9$ এবং $x=3$ বা -3।

সুতরাং বর্গমূল ঋণাত্মক বা ধনাত্মক দুইই হতে পারে। যদিও -3 এখানে বিবেচ্য নয়, কেননা -3 এবং সমস্ত ঋণাত্মক সংখ্যার ব্যাখ্যা জ্যামিতিক চিত্রের সাহায্যেই সম্ভব। বর্গমূল হ'ল একই সংখ্যার বারবার গুণনের বিপরীত প্রক্রিয়া।

একটি সংখ্যার বর্গমূল নির্ণয়ের ক্ষেত্রে উৎপাদক পদ্ধতিই প্রথম অবলম্বন করা উচিত। যেমন : $4=2\times2=2^2$

$\therefore \quad \sqrt{4}=2$। অনুরূপভাবে $225=3\times3\times5\times5=3^2\times5^2$

$\therefore \quad \sqrt{225}=\sqrt{3^2\times5^2}=3\times5=15$

ভগ্নাংশের বর্গমূল নির্ণয়ের ক্ষেত্রে লব ও হরের পৃথক বর্গমূল নির্ণয় করতে হয়।

যেমন : $\sqrt{1\frac{17}{64}}=\sqrt{\frac{81}{64}}=\sqrt{\frac{9^2}{8^2}}=\frac{9}{8}=1\frac{1}{8}$

ভাগ পদ্ধতিতে বর্গমূল শেখানো ঃ

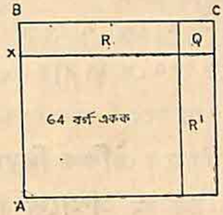
Prof Nunn জ্যামিতিক চিত্রের সাহায্যে ভাগপদ্ধতিতে বগমূল নির্ণয়ের পদ্ধতিটী সুন্দরভাবে বিশ্লেষণ করেছেন।

যেমন ঃ 68.89-এর বর্গমূল নির্ণয় করতে হবে।

মনে করি AC = 64 বর্গ একক বা 81 বর্গ একক

তাহলে AB = 8 একক বা 9 একক হবে

কিন্তু ক্ষেত্রফল হ'ল 68·89 বর্গ একক



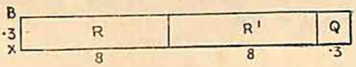
∴ AB = 8 একক ও 9 এককের মধ্যবর্ত্তী হবেই।

এখানে $R+R'+Q=(68{\cdot}89-64)$

বা 4·89 বর্গ একক।

তাহলে XB-র দৈর্ঘ্য হবে $=4{\cdot}89 \div (8+8)$

$=4{\cdot}89/16 = {\cdot}30$ বা ·3 (প্রায়)



∴ মনে করি XB = ·3

$\therefore R+R'+Q=16{\cdot}3\times{\cdot}3=4{\cdot}89$

∴ নির্ণেয় বর্গমূল হচ্ছে $=8+{\cdot}3=8{\cdot}3$

ভাগপ্রক্রিয়ার মাধ্যমে চিত্রের ব্যাখ্যা ঃ

	8 + ·3 বা 8·3
8	68·89
	64
8 + 8 + ·3	4·89
বা 8 × 2 + ·3	4·89
বা 16·3	×

এইভাবে আমরা বিভিন্ন সংখ্যার বর্গমূল নির্ণয় করতে পারব।

ঐকিক নিয়ম ও তার প্রয়োগ (Unitary method and its application) ঃ

4 গজ কাপড়ের দাম 20 টাকা হলে 5 গজ কাপড়ের দাম কত? 1 গজের দাম 3·50 টা. হলে 6 গজের দাম কত?

উপরের দুটী প্রশ্নের উত্তরই শিক্ষার্থী দিতে পারবে। তবে দুটী প্রশ্নতেই চূড়ান্ত প্রশ্ন হ'ল দাম বা মূল্য নির্ণয়।

১মটির ক্ষেত্রে 4 গজ কাপড়ের দাম = 20 টা.

1 ,, ,, ,, = 20 টা. ÷ 4 = 5 টা.

5 ,, ,, ,, = 5 টা. × 5 = 25 টা.

২য়টির ক্ষেত্রে 1 গজের দাম = 3·50 টা.

6 ,, ,, = 3·50 টা. × 6 = 21·00 টা. = 21 টা.

নিয়ম হচ্ছে, যা দেওয়া আছে তা বিশ্লেষণ ক'রে একটা বাক্যে এমনভাবে প্রকাশ করতে হবে যে, যা বার করতে হবে তার বিবরণ যেন সবচেয়ে শেষে আসে। একটার দাম বার করে নিয়ে তারপর যতগুলির দরকার তার দাম বার করতে হয়। সেইজন্যই এই নিয়মকে **ঐকিক নিয়ম** বলা হয়।

এই নিয়ম **সম্পর্কে শিক্ষার্থীরা দক্ষতা অর্জন করার পর পাটীগণিতের অন্যান্য সমস্যা যেমন, শতকরা হিসাব, লাভ ক্ষতি, সময়-কার্য্য, সময়-দূরত্ব, সরল-সুদকষা ও আয়-কর সম্পর্কীয় বিভিন্ন সমস্যার সমাধান সহজ ও সাবলীল হবে।**

গড় নির্ণয় (Average) :

"গড়" এর অর্থ অনুধাবন করার জন্য দৈনন্দিন জীবনের ঘটনার পরিপ্রেক্ষিতে সমস্যা উপস্থাপন করতে হবে। যেমন :

পরীক্ষার ফলাফলের গড় হিসাব, দৈনিক ছাত্র/ছাত্রী উপস্থিতির গড় হিসাব, বৃষ্টিপাতের গড় হিসাব প্রভৃতির মাধ্যমে 'গড়' উপস্থাপন বাঞ্ছনীয়।

গড় এর ধারণা আয়তলেখর (Bargraph) **মাধ্যমেও দেওয়া যেতে পারে।**

অনুপাত ও সমানুপাত (Ratio & Proportion) :

অনুপাত ও সমানুপাতের সংজ্ঞা প্রথমেই উদাহরণের মাধ্যমে উপস্থাপন করতে হবে।

যেমন : একটি সংখ্যার আর একটি সংখ্যার সঙ্গে যে সম্বন্ধ বা একটি বস্তুর কিছু পরিমাণের সঙ্গে সেই বস্তুর বা সমজাতীয় বস্তুর সম বা অসম পরিমাণের যে সম্বন্ধ তাকে অনুপাত বলে।

যেমন : 60 : 50 ; $a : b$; 15 মি. : 3 ডেসি. মি.

অনুপাত একটি শুদ্ধ সংখ্যা, বস্তু নয়—এই ধারনাটী বুঝিয়ে দিতে হবে।

যখন দুটী অনুপাত সমান তখন তাকে সমানুপাত বলে।

যেমন :

$a : b = c : d$, $3 : 5 = 9 : 15$

বা $a : b :: c : d$, বা $3 : 5 :: 9 : 15$

তারপর সমানুপাতের বিভিন্ন নিয়ম ও তার প্রয়োগ সম্পর্কে শিক্ষার্থীদের ধারণা প্রদান করতে হবে। মনে রাখতে হবে সমস্ত সমস্যাই হবে বাস্তব ভিত্তিক ও পদ্ধতি হবে আরোহীমূলক।

প্রশ্নাবলী

1. Discuss the methods of teaching of the extraction of square root by the method of successive division. [C. U. B. T. '65]

2. Write Pedagogical notes on concept of Number. [C. U. B. T. '66]

3. Discuss the respective roles of Unitary method and Ratio method in Arithmatic. [C. U. B. T. '64-69]

4. Write Pedagogical notes on the Notation and numeration as foundations of Arithmatic. [B. U. B. T. '67]

5. Discuss the respective roles of the first four rules as devices for shortening the process of counting. [B. U. B. T. '69]

7. Write notes on :
   - (a) Application of set theory in the teaching of H. C. F. and L. C. M. in Arithmatic.
   - (b) Metric system and its teaching.
   - (b) Decimal fraction and its teaching.

একাদশ অধ্যায়

বীজগণিত শিক্ষণ
(Teaching of Algebra)

বীজগণিতের স্বরূপ

বীজগণিতের ইংরাজী প্রতিশব্দ Algebra কথাটির উৎপত্তি হ'ল আরবী শব্দ 'Al-gebr', 'Al-Muquabullah' থেকে। 825 খ্রীষ্টাব্দে আরবদেশের আব্ খৌরীজিমি নামক এক গণিতজ্ঞ প্রথম ঐ শব্দ ব্যবহার করেন। 'Al-jebr' শব্দটীর অর্থ হ'ল সমীকরণে কোন রাশির **পার্শ্ব-পরিবর্তন** এবং 'Al-Muquabullah' শব্দটীর অর্থ হ'ল সমীকরণের **উভয় পার্শ্ব থেকে সমান রাশি বিয়োগ করা।**

হিন্দু গণিত শাস্ত্রে সমীকরণের উল্লেখ পাওয়া যায় বহু পূর্বে। তাঁরা বড় বড় সংখ্যা নিয়ে নানারকম সমস্যার সমাধান করতেন। অনেকে বলেন ভারতীয়রা গ্রীকদের থেকেও সংখ্যাবিজ্ঞান ও বীজগণিতে বেশী উন্নত ছিল।

গ্রহবিজ্ঞান (Astronomy) এবং **বলবিদ্যা** (Mechanics) এর বিভিন্ন সমাধান করতে গিয়েই বীজগণিতের সৃষ্টি হয়েছে। আগেকার বীজগণিতের বৈশিষ্ট্য ছিল—নিয়মভিত্তিক গণনা ও সমস্যার সমাধান। তখন বিমূর্ত সংখ্যার ব্যবহার ছিল না। ক্রমে ক্রমে বিমূর্ত সংখ্যা ও সংক্ষিপ্ত প্রতীকের ব্যবহার স্বরু হয়েছে।

প্রথমদিকে নিয়ম ও সমস্যাগুলি ভাষার মাধ্যমেই প্রকাশ করা হ'ত। তখন বীজগণিত ছিল **আড়ম্বরপূর্ণ ভাষার বীজগণিত** বা Rhetoric Algebra। যেমন : 5টী পেন্সিলের দামের সঙ্গে 6টী কলমের দাম যোগ করলে হয় 13 টাকা।

পরবর্ত্তী স্তরে সংক্ষিপ্ত ভাষার মাধ্যমে সমস্যার প্রকাশ হতে থাকল। এই স্তরেব বীজগণিত হ'ল Syncopated Algebra বা **সংক্ষিপ্ত ভাষামূলক বীজগণিত।** যেমন : 5টী পেন্সিল + 6টী কলম = 13 টাকা।

তারপর প্রতীক চিহ্নের মাধ্যমে সমস্যাকে প্রকাশ করা হ'লো। একে বলা হ'ল **প্রতীক চিহ্নভিত্তিক বীজগণিত** বা Symbolic Algebra। যেমন :

$5x+6y=13.$

আপাতদৃষ্টিতে পাটীগণিত ও বীজগণিতের মধ্যে মৌলিক পার্থক্য বিশেষ নেই উভয়কেই বলা যায় সংখ্যার গণিত। পার্থক্য এই যে, বীজগণিতে সংখ্যার বদলে অক্ষর ব্যবহৃত হয় প্রতীক হিসাবে। সেইজন্যই বীজগণিতকে বলা হয় **আক্ষরিক পাটীগণিত** বা Literal Arithmatic।

পাটীগণিতের অনেকগুলি অঙ্ক কষবার পর যখন একটি সাধারণ নিয়মে উপস্থিত হওয়া যায় তখনই বীজগণিতের ব্যবহার এসে পড়ে। তাই বীজগণিতকে **সাধারণীকৃত পাটীগণিত** বা Generalised Arithmatic হিসাবেও গণ্য করা যায়। সেইজন্য মাধ্যমিক পর্য্যায়ের পাঠক্রমে বিশেষতঃ নবম ও দশম শ্রেণীর গণিত পাঠক্রমে অনুপাত-সমানুপাত, শতকরা হিসাব, সরল সুদকষা এবং লাভ-ক্ষতি সম্পর্কিত সমস্যার সমাধানে বীজগণিতের ব্যবহার করার কথা বলা হয়েছে।

পাটীগণিতকে যেমন **সংখ্যার গণিত** বা Calculus of Numbers বলা হয় তেমনি বীজগণিতকে Calculus of Functions বা **অপেক্ষক গণিত** হিসাবেও বর্ণনা করা যায়। যেমন: $y=3x$ ধরলে; y কে বলা হয় xর অপেক্ষক। কারণ yর মান x এর মানের ওপর নির্ভরশীল।

কোন কোন ক্ষেত্রে বীজগণিত ছাড়া কতকগুলি ভাবপ্রকাশ অসম্ভব হ'ত। যেমন: $(x+a)^n=x^n-nx^{n-1}\,a+\frac{n(n-1)}{2}\,x^{n-2}a^2+\quad+a^n$

এই দ্বিপদ উপপাদ্যের ধারণাটি প্রতীক ছাড়া প্রকাশ করা অসম্ভব। তাই বীজগণিতের প্রতীক শুধু সংখ্যারই প্রতিনিধিত্ব করে না, ভাবপ্রকাশের এক সংক্ষিপ্ত ও সহজ উপায়ও বটে। সেজন্য বীজগণিতকে Short-hand Algebraও বলা হয়।

বীজগণিত শিক্ষণের প্রত্যক্ষ উদ্দেশ্য:

অধ্যাপক Youngর মতে, বীজগণিত শিক্ষণের মূল উদ্দেশ্য হল:

(১) পাটীগণিতে তত্ত্বগত প্রক্রিয়ার বিস্তৃতি ও দৃঢ়ভাবে প্রতিষ্ঠা।

(২) অভ্যাস এবং গণনার কার্য্যকরী উন্নত কৌশল আবিষ্কার ও শিক্ষার্থীদের গণনার দক্ষতা বৃদ্ধি।

(৩) সমীকরণ পদ্ধতির উন্নয়ন এবং পাটীগণিত, জ্যামিতি, পদার্থবিদ্যা ও অন্যান্য প্রাকৃতিক বিজ্ঞানে বীজগণিতের প্রয়োগ।

(৪) উচ্চপর্য্যায়ের গণিত ও বিভিন্ন ভৌতবিজ্ঞান শিক্ষায় বীজগণিতের প্রয়োজনীয় বিষয়ের অন্তর্ভুক্তি।

বীজগণিতের কেন্দ্রীয় প্রসঙ্গ: সমীকরণ:

বীজগণিত বা Algebra বা Al-jebr বা Al-Muquabullah-র অর্থের মধ্যেই সমীকরণের অন্তর্নিহিত ব্যাখ্যা লুকিয়ে রয়েছে। বীজগণিতের ক্রমবিকাশের ক্ষেত্রেও

আড়ম্বরপূর্ণ ভাষার বীজগণিত থেকে প্রতীকচিহ্ন-ভিত্তিক বীজগণিতের আবির্ভাব—সমীকরণের ইঙ্গিত প্রমান করছে। তাই **সমীকরণকে বীজগণিতের কেন্দ্রীয় প্রসঙ্গ বলা হয়।** এ যেন বীজগণিতের মেরুদণ্ড। বীজগণিত যেন শুকনো হাড় আর সমীকরণ রক্ত ও মাংস। তাই তো অধ্যাপক Young বলেছেন "It is the equation that puts flesh and blood upon the dry bones of the skeleton of algebraic routine." বীজগণিত শেখাতে হবে সমীকরণের মাধ্যমে। বীজগণিতে কতকগুলি নিয়ম শিখতে হয়। কিন্তু সেই নিয়মগুলি শেখাই বীজগণিত শেখার উদ্দেশ্য নয়। সমস্যামূলক অঙ্কের সমাধান করাই বীজগণিত শেখার মূখ্য উদ্দেশ্য। যে সমস্যা গাণিতিক সমস্যা, সেটি বিজ্ঞানের সমস্যা, যান্ত্রিক কাজের সমস্যা, এমনকি দৈনন্দিন সমস্যাও হতে পারে। বিদ্যালয়ে যে বীজগণিত শেখাতে হবে তার উদ্দেশ্য হবে এই সমস্যা সমাধানের দক্ষতা অর্জন করা। সমীকরণই সমস্যা সমাধানের দক্ষতা অর্জনের সহায়ক। তাই সমীকরণকে বলা হয় বীজগণিতের কেন্দ্রীয় বিষয়।

সমীকরণ শেখাবার আগে **সমীকরণ ও অভেদের মধ্যে পার্থক্যটীও** জানা বিশেষ প্রয়োজন। অভেদ বা Identity একটি ঘটনা বিবৃত করে আর সমীকরণ বা Equation বিবৃত করে এক সমস্যার। যেমন: $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ একটী অভেদ, এখানে a, b এর সাংখ্যমান নিরপেক্ষ। কিন্তু $x^2+5x=6$ একটী সমীকরণ, কারণ এটী এক সমস্যার কথা বলছে। এখানে বলা হয়েছে "এমন কোন্ সংখ্যা আছে যার বর্গের সংগে সংখ্যাটীর পাঁচগুণ যোগ করলে ছয় হবে?'

বীজগণিত শিক্ষণ পদ্ধতি:

অমূর্ত বা বিমূর্ত বস্তুকে মূর্ত প্রতীকের সাহায্যে ব্যাখ্যা করা, অর্জিত ধারণা ও যুক্তির মাধ্যমে সেগুলি পর্যালোচনা করা, বাস্তব ও অবাস্তব ক্ষেত্রের ব্যাখ্যা করা এবং বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করা প্রভৃতি অংশগুলিই বীজগণিতের মধ্যে প্রধান।

বীজগণিত শিক্ষণ স্থরু

জানা—অজানা, প্রত্যক্ষ-পরোক্ষ, বাস্তব—অবাস্তব, মূর্ত-অমূর্ত সব কিছুই বীজগণিতের অংশবিশেষ। প্রকৃতপক্ষে সাধারণীকৃত গণিতই হ'ল বীজগণিত। সুতরাং বীজগণিত শিক্ষণ সম্পর্কে যথেষ্ট সাবধানতা অবলম্বন করা উচিত। তাই বীজগণিত কখন, কিভাবে স্থরু করতে হবে তার সুস্পষ্ট পরিকল্পনার প্রয়োজন। তবে একথা নিঃসন্দেহ যে **পাটীগণিত শিক্ষার সঙ্গে সঙ্গেই বা মাধ্যমে বীজগণিত শিক্ষণ স্থরু করতে হবে।** কোঠারী কমিশনের মতে শিক্ষার

প্রাথমিক স্তরে অর্থাৎ অষ্টম শ্রেণীর মধ্যেই পাটীগণিত ও বীজগণিত একই সঙ্গে একই বিষয় হিসাবে শিক্ষা দেওয়া উচিত। এই স্তরে দিক-নির্দেশক সংখ্যা, সমীকরণ, লেখচিত্র ও অপেক্ষক সম্পর্কে ধারণা দেওয়া প্রয়োজন। বীজগণিতের অক্ষরগুলিকে সংখ্যারূপেই গণ্য করতে হবে এবং সংখ্যার সাধারণীকরণরূপেই পাটীগণিতের সংখ্যার ধারণা দিতে হবে। তেমনি বীজগণিতের সূত্রগুলিতে অক্ষরগুলির বদলে সাংখ্যমান বসিয়ে তাদের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করতে হবে। পাটীগণিত ও বীজগণিতের মধ্যে কোথাও সীমারেখা টানা কোনোমতেই উচিত নয়। বীজগণিতকে পাটীগণিতের ভিত্তি সুদৃঢ় করা জন্যই ব্যবহার করা প্রয়োজন এবং বীজগাণিতিক সূত্রগুলিকে গণনার দক্ষতা বৃদ্ধির কাজে প্রয়োগ করা উচিত।

সাধারণভাবে **তিনটি উপায়ে** বীজগণিত শিক্ষণ সুরু করা যায়ঃ—

বীজগণিত শিক্ষণ পদ্ধতি

(a) **চার নিয়মের পদ্ধতি** (Four Rules Method)

(b) **সমস্যা বা সমীকরণ পদ্ধতি** (Problem or Equation Method)

(c) **সূত্র গঠন পদ্ধতি** (Formula Method)

চার নিয়মের পদ্ধতিঃ

যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ-এর মধ্য দিয়েই সাধারণতঃ বীজগণিত শিক্ষা দেওয়া হয়। অনেকের মতে পাটীগণিত শিক্ষণ কিছুটা অগ্রসর হলেও শিক্ষার্থীদের একটা ন্যূনতম মানসিক বয়স না হ'লে তারা প্রতীক ও তার ব্যবহার করতে পারে না। তাই পাটীগণিতের সম্প্রসারণ হিসেবেই বীজগণিতের সুরু করা হয়। পাটীগণিতের চার নিয়মের ব্যবহারগুলি অনুসরণ ক'রে প্রতীকগুলির ভেতরেও অনুরূপ নিয়ম অনুসরণ করার প্রবণতা, দক্ষতা ও অভ্যাস সৃষ্টি হয়। এদিক থেকে এটি একটি স্বাভাবিক ও ধারাবাহিক পদ্ধতি। বেশীর ভাগ শিক্ষার্থীর কাছেই এই পদ্ধতি সহজবোধ্য হয়। পাটীগণিতের ধারণা বা আকারকেই প্রথমে বীজগণিতে কাজে লাগানো হয়। আমরা ভাষার বীজগণিত থেকে প্রতীক-মূলক বীজগণিতে আসার পদ্ধতিতেও এই নিয়মএর ব্যবহার লক্ষ্য করেছি। যেমনঃ "3টী আম এবং 5টী আম মিলে 8টী আম হয়"—এই ধারণাকে প্রকাশ করি $3+5=8$। এটা একটা প্রচ্ছন্ন মূর্ত স্তর। এথেকেই $3x+5x=8x$ এর ধারণাটা বোধগম্য হয়। তাই এই "জানা থেকে অজানা" পদ্ধতি—নিয়মমাফিক পদ্ধতি হিসাবে জনপ্রিয়, চিত্তাকর্ষক ও গতানুগতিক পদ্ধতি।

চার নিয়মের পদ্ধতির সুবিধা ঃ

(১) সংখ্যা ও প্রতীক-এর নির্ভুল ও যুক্তিপূর্ণ ব্যবহার করার ক্ষমতা জন্মায়।

(২) পাটীগণিত-এর সামান্যীকরণ প্রক্রিয়ার সঙ্গে শিক্ষার্থীরা অজ্ঞাতেই পরিচিতি লাভ করে।

(৩) যে কোন সমস্যা সমাধানে চার নিয়মের ব্যবহার করার দক্ষতা সৃষ্টি হয়।

চার নিয়মের অসুবিধা ঃ

(১) পদ্ধতিটি যান্ত্রিক ও অভ্যাসগত হবার ফলে বীজগণিত শিক্ষার্থীদের কাছে নীরস বিষয় বলে মনে হ'তে পারে।

(২) যুক্তি, বিচার, বিশ্লেষণ ও চিন্তাকরার কোন অবকাশ থাকে না।

(৩) অন্ধ অনুসরণের ফলে শিক্ষার্থীদের মধ্যে সৃজনীশক্তির বিকাশ ঘটে না।

(৪) পদ্ধতিটি ঐতিহাসিক ধারাবাহিকতা ও প্রগতির সঙ্গে কোন সামঞ্জস্য রাখতে পারে না।

(৫) পদ্ধতিটিতে অপেক্ষক সম্পর্কে কোন আলোচনা করে না।

তবে সমস্ত দিক বিচার করলে পদ্ধতিটী সম্পূর্ণভাবে বর্জন করাও চলে না। তাই London Mathematical Association বলেন "a certain amount of teaching of the four rules is inevitable in the early stages".

সমস্যা বা সমীকরণ পদ্ধতি ঃ পাটীগণিতের সরল সমস্যা সমাধানের মধ্য-দিয়েই এই পদ্ধতির আত্মপ্রকাশ। পাটীগণিতের সমস্যার সঙ্গে পার্থক্য এই যে, বীজগণিতের সমস্যাটিতে একটি অজানা রাশি যেমন 'x' ধরা হয় এবং সমগ্র সমস্যাটীকে একটী সমীকরণে প্রকাশ করা হয়। যেমন ঃ 5-এর সঙ্গে কত যোগ করলে 11 হবে? এটি পাটীগণিতের সরল সমস্যা। এখানে বীজগণিতের সমস্যা হিসাবে অজ্ঞাত রাশি বা 'কত যোগ করলে' র বদলে 'x' ধরা হলে হয়, $5+x=11$ —এটী একটী সমীকরণ। এইভাবে পাটীগণিতের সমস্যাগুলিকে বিশ্লেষিত ক'রে অজ্ঞাত বা জ্ঞাতব্য বিষয়টীকে 'x' দিয়ে সূচিত ক'রে সমস্যা-সমাধান বা সমীকরণ পদ্ধতিতে বীজগণিত সুরু করা শিক্ষার্থীদের পক্ষে আকর্ষণীয় হবে। তাছাড়া এই পদ্ধতির মাধ্যমে গণিত শিক্ষার মূল উদ্দেশ্যগুলি কার্য্যে রূপায়ণ সম্ভব হয়।

সমস্যা বা সমীকরণ পদ্ধতির সুবিধা ঃ

(১) শিক্ষার্থীরা সব সময়ে সামনে একটা সমস্যা দেখতে পায় এবং তার সমাধানে আগ্রহী হয়।

(২) শিক্ষার্থীর স্বাভাবিক বৈশিষ্ট্যই হ'ল ধাঁধার উত্তর দেওয়া, লুকানো সংখ্যার আবিষ্কার করা প্রভৃতি। এই পদ্ধতির কার্যকর হওয়ার পথে ঐ প্রবণতা-গুলি বিশেষ সহায়ক।

(৩) পদ্ধতিটি আগ্রহোদ্দীপক, স্বনির্ভর ও মনোবিজ্ঞানসম্মত।

(৪) শিক্ষার্থীদের চিন্তা, যুক্তি, বিচার ও বিশ্লেষণ ক্ষমতাবৃদ্ধির সহায়ক।

(৫) সমস্যার সমাধানের মধ্য দিয়েই বীজগণিতের সৃষ্টি। তাই পদ্ধতিটি বীজগণিতের ইতিহাসের সঙ্গে সামঞ্জস্যপূর্ণ।

সমস্যা বা সমীকরণ পদ্ধতির অসুবিধা :

(১) এই পদ্ধতির প্রয়োগ শিক্ষকদের কাছে ক্লান্তিকর ও কষ্টসাধ্য। উপযুক্ত পদ্ধতি ও পরিকল্পনা গ্রহণ না করলে পদ্ধতির মূল্য উদ্দেশ্যই হবে ব্যাহত।

(২) সমস্যা পদ্ধতিতে বা সমীকরণে 'x' হ'ল অজ্ঞাতরাশি কিন্তু সূত্রে বা অপেক্ষকে 'x' হ'ল চলরাশি। তাই 'x' সম্পর্কে এই নতুন ধারণা দেওয়া অসুবিধাজনক।

(৩) পদ্ধতিটি মাত্র মুষ্টিমেয় উন্নত-বুদ্ধিসম্পন্ন শিক্ষার্থীদের কাছেই সন্তোষজনক ও কাম্য।

সূত্রগঠন পদ্ধতি : সাধারণভাবে বীজগণিত শিক্ষণে সংখ্যার বদলে আক্ষরিক প্রতীকের ব্যবহার করা হয় এবং এইরূপ প্রতীকের মাধ্যমে কয়েকটি ব্যবহারিক ও সাধারণ ধারণা বা নিয়মকে স্পষ্টভাবে প্রকাশ করা হয়। যেমন : আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ, এই ধারণাটীকে $A = l \times b$ এইভাবে প্রকাশ করা যায়।

আবার সংখ্যাসংক্রান্ত বিভিন্ন অভেদ বিষয়ক সম্পর্ককেও প্রতীকের সাহায্যে প্রকাশ করা যায়। যেমন : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$। বিভিন্ন পরিমাণগত ধারণার মধ্যে অভেদমূলক এরূপ প্রকাশকে বলা হয় সূত্র। এগুলির প্রয়োগের দক্ষতা সৃষ্টিতেও অভ্যাসগঠনে আরোহী বা পরীক্ষামূলক পদ্ধতি অনুসরণ করাই শ্রেয়।

সূত্রগুলিকে সাধারণভাবে "অগ্রগামী" পদ্ধতি এবং 'পশ্চাদ্‌গামী' বা 'সমীকরণ' পদ্ধতিতে ও কাজে লাগানো যায়। যেমন : সরল সুদ = $\frac{\text{আ} \times \text{হা} \times \text{ব}}{100}$ বা $I = \frac{PRT}{100}$

এই সূত্রের সাহায্যে P, T এবং R জানা থাকলে সরাসরি মান বসিয়ে I এর মান পাওয়া যায়। এরই নাম 'অগ্রগামী' পদ্ধতি। আবার P ও R এর জন্য একটি

I পেতে গেলে T এর মান যে পদ্ধতি অবলম্বন ক'রে বার করতে হয় তার নাম 'পশ্চাদ্‌গামী' পদ্ধতি।

প্রকৃতপক্ষে সূত্রের ব্যবহার ও সমীকরণ বা সমস্যা সমাধানের মূল ও সহজ পদ্ধতিগুলির মধ্যে বিশেষ প্রভেদ নেই। একটিমাত্র সূত্রের সাহায্যে পশ্চাদ্‌গামী বা সমীকরণ পদ্ধতিতে অন্যান্য বিষয়গুলি জানা থাকলে বাকী একটিমাত্র বিষয়েরই মান জানা সম্ভব। সূত্রটির মধ্যে জানা মানগুলো বসিয়ে অজানা বস্তুটির প্রতীক পরিবর্তন করে 'x' বসালেই সূত্রটি একটি সরল সমীকরণে পরিণত হয়।

সূত্র গঠন পদ্ধতির সুবিধা ঃ

(১) বিভিন্ন ব্যবহারিক ও প্রত্যক্ষ নিয়মকে মূর্তভাবে উপস্থাপনে ও ধারণা প্রদানে সহায়তা করে।

(২) সাধারণীকরণ শিক্ষার মাধ্যমে প্রতীকমূলক ভাষা ব্যবহারের দক্ষতা জন্মায়।

(৩) মানসিক কার্য্যের সরলতা সম্পাদন ও চিন্তার সংক্ষিপ্তকরণে সাহায্য করে।

(৪) গণিতের জটিলতা নিবারণ ক'রে গণিতের প্রতি ভীতি দূরীকরণে সহায়তা করে।

সূত্র গঠন পদ্ধতির অসুবিধা ঃ

(১) বুদ্ধি ও বোধগম্যতার বদলে যান্ত্রিকতা বৃদ্ধি পায়।

(২) পদ্ধতিটি স্বনির্ভর নয়, কারণ এটি প্রয়োগের আগে কিছু নিয়ম শিখতে হয়।

(৩) শিক্ষাদান সহজ কিন্তু শিক্ষাগ্রহণে জটিলতা দেখা দেয়।

(৪) পদ্ধতিটি অভ্যাস-সাপেক্ষ এবং পরিশ্রম-সাপেক্ষ।

(৫) পদ্ধতির প্রয়োগের নির্দেশনা সহজবোধ্য হয় না।

সমস্যা পদ্ধতি ও সূত্র গঠন পদ্ধতির তুলনা ঃ

(১) দুই পদ্ধতিই সমস্যা সমাধান ভিত্তিক। ফলে শিক্ষার্থীদের মধ্যে কৌতুহল ও আগ্রহ সঞ্চার হয়।

(২) উভয় পদ্ধতিই সমীকরণ নির্ভর। বীজগণিতের ঐতিহাসিক অগ্রগতির দিক থেকে এটি সামঞ্জস্যপূর্ণ।

(৩) শিক্ষার্থীদের মানসিক শক্তির বিকাশ ও প্রয়োগে উভয় পদ্ধতিই সহায়ক।

(৪) চার নিয়মের শিক্ষা উভয় পদ্ধতিতেই দরকার মত প্রদান করা হয়, তবে যান্ত্রিকভাবে নয়।

(৫) সূত্রগঠন পদ্ধতি অপেক্ষা সমস্যা পদ্ধতিতে আবিষ্কারের সুযোগ বেশী।

(৬) সূত্রগঠন পদ্ধতিতে সমস্যা পদ্ধতি অপেক্ষা প্রতীকের ব্যবহার বেশী।

(৭) সমস্যার সমাধান—সূত্রগঠন পদ্ধতিতে দ্রুত, কিন্তু সমস্যা পদ্ধতিতে বিলম্ব।

বীজগণিত শিক্ষণে সমস্যাপদ্ধতি ও সূত্র-গঠন পদ্ধতির মধ্যে কোন্‌টিকে অগ্রাধিকার দিতে হবে—এ নিয়ে শিক্ষাবিদ্‌দের মধ্যেও মতভেদ রয়েছে। London Mathematical Association এর মতে "It may be said definitely that it is a mistake to lay emphasis on either problems or formulae to the exclusion of the other".

বীজগণিতে কোন্ পদ্ধতি অবলম্বন করা উচিত ঃ

উপরের আলোচনা থেকে দেখা যাচ্ছে যে, **বীজগণিত শিক্ষার সুরুর ব্যাপারে কোন একটি পদ্ধতি যথেষ্ট নয়।** তেমনি বীজগণিত শিক্ষণসুরুর কোন সুনির্দিষ্ট সময় নির্ণয় করাও শক্ত। গণিত শিক্ষণের যে পদ্ধতিই অবলম্বন করা হোক না কেন, সেটি হবে মনোবিজ্ঞানসম্মত ও শিক্ষাবিজ্ঞানসম্মত। তার জন্য দেখতে হবে যে, (১) বিষয়টি যেন শিক্ষার্থীদের পূর্বজ্ঞান ও অভিজ্ঞতা নিরপেক্ষা না হয় (২) বিষয়টি প্রয়োগভিত্তিক হয় (৩) বিষয়টি যেন আগ্রহোদ্দীপক অথচ চিন্তা, বুদ্ধি, বিচার শক্তির সহায়ক হয় (৪) বিষয়বস্তুর অর্থ যেন শিক্ষার্থীরা সহজে অনুসরণ করতে পারে এবং (৫) বিভিন্ন পদ্ধতির দক্ষতা ও অভ্যাস গঠনের যেন সুযোগ থাকে।

"সাধারণীকৃত" এবং 'আক্ষরিক' পাটীগণিতের মাধ্যমেই বীজগণিতের সুরু—এটা অনস্বীকার্য্য। পাটীগণিতের সরল সমস্যা সংক্রান্ত বিভিন্ন নিয়মগুলোকে প্রতীক ও সূত্রের সাহায্যে প্রত্যক্ষ করে মানসিক ও আক্ষরিক সমীকরণের মাধ্যমে বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করা হয়। তাই অনেকে **সূত্র গঠন ও সমস্যা বা সমীকরণ পদ্ধতির সমন্বিত রূপকেই উপযুক্ত পদ্ধতি বলে মনে করেন।** এই ব্যাপারে London Mathematical Association এর নির্দেশ, "Equation should, with beginners, arise either from Problems or from the use of formulae when one of the letters in the formulae is unknown."

বীজগণিতের কয়েকটী বিষয়ের শিক্ষণ পদ্ধতি :

দিকনির্দ্দেশক সংখ্যা (Directed Number) :

ভারতীয় গণিতজ্ঞ ব্রহ্মগুপ্তের লেখায় সর্বপ্রথম ঋণাত্মক সংখ্যার উল্লেখ দেখতে পাওয়া যায়। তিনি ধনাত্মক রাশিকে সম্পত্তি এবং ঋণাত্মক রাশিকে ঋণ বলে নির্দেশিত করেন। তাঁর মতে একটি সরলরেখার একদিক ধনাত্মক রাশি নির্দেশ করলে বিপরীত দিক হবে ঋণাত্মক রাশি। বিখ্যাত গণিতজ্ঞ Diophantus একটি দ্বিঘাত সমীকরণের দুটি বর্গমূল নির্ণয় করেন। ভাস্করের মতে $x^2-45x=250$ সমীকরণটির সমাধান $x=50$ বা -5 ; কিন্তু তিনি বলেন সাধারণ মানুষ শেষের মানটির মূল্য অনুমোদন না করায় গ্রহণ করা চলবে না।

হিন্দুরা এই রাশিকে বিয়োজ্য হিসাবেই ব্যবহার করেছেন। সংখ্যার ওপর একটা ছোট বৃত্ত বা বিন্দু বসিয়ে ঋণাত্মক রাশির প্রকাশ করতেন। ভাস্কর লিখতেন : $\mathring{6}$ অথবা $\ddot{6}$।

চীনে বিয়োজ্য সংখ্যা হিসাবে এই ঋণাত্মক সংখ্যা ব্যবহার করা হত। তাঁরা ধনাত্মক সংখ্যাকে লাল রঙে ও ঋণাত্মক সংখ্যাকে কালো কালিতে লিখতো।

গ্রীকেরা $(a-b)^2$ বা $(a+b)(a-b)$-র সমতুল্য জ্যামিতিক চিত্র আঁকতেন এবং $(-b)(-b)$ এবং $(+b)(-b)$-এর ফলও জানতেন কিন্তু তাঁরা ঋণাত্মক সংখ্যা বলে কিছু উল্লেখ করতেন না।

আরবদেশে ১২২৫ খ্রীষ্টাব্দে ফিবোনেক্সি ঋণাত্মক রাশিকে লাভের বদলে ক্ষতি হিসাবে ব্যাখ্যা করেছেন। ১৫৪৪ খ্রীষ্টাব্দে ষ্টিফেল ঋণাত্মক রাশিকে 0 (শূন্যর)-র থেকে ছোট হিসাবে প্রকাশ করেছেন।

দিক নির্দেশ :

শিক্ষার্থীরা এতদিন পাটীগণিতে ধনাত্মক সংখ্যারই ব্যবহার শিখেছে। বীজগণিতেই ঋণাত্মক রাশির প্রথম পরিচয়। সংখ্যার দুইরকম ব্যবহার (১) **ধনাত্মক** (২) **ঋণাত্মক**।

একটি শিক্ষার্থী একটা পেন্সিল হাতে শ্রেণীকক্ষ থেকে বেরিয়ে সিঁড়ির এক মোড়ের প্রশস্ত (Landing) জায়গায় এসে থামলো। তারপর ওপরে 13 ধাপ যখন উঠেছে তার হাত থেকে পেন্সিলটা পড়ে গেলো। পেন্সিলটা তুলবার জন্য তাকে 6 ধাপ নামতে হ'লো। এখন সে মোড়ের প্রশস্ত জায়গা থেকে 7 ধাপ ওপরে আছে। এই 7টি ধাপ বার করতে মনে মনে গুণলে, প্রশস্ত জায়গা থেকে যে ধাপটিতে পেন্সিল আছে তার দূরত্ব $13-6=7$ ।

সাধারণতঃ বিয়োগ চিহ্নের অর্থ অনুযায়ী বলা যায় যে 13 থেকে 6 বিয়োগ দেওয়া হয়েছে। এখানে 13-র আগে যোগচিহ্ন এবং 6 এর আগে বিয়োগচিহ্ন। 13 এর যোগচিহ্ন মানে 13 ধাপ ওপরে এবং 6 এর আগে বিয়োগ চিহ্ন মানে 6 ধাপ নীচে। সুতরাং বিয়োগ চিহ্নের দ্বারা দিক পরিবর্ত্তনকে বোঝায়। যদি পেন্সিলটি আবার প্রশস্ত জায়গায় এসে পড়তো তখন হ'তো $13-13=0$ অর্থাৎ 13 ধাপ ওপরে গিয়ে 13 ধাপ নীচে নেমেছে।

কিন্তু পেন্সিলটি যদি 13 ধাপ বেয়ে নেমে প্রশস্ত জায়গায় পড়ে আরো 7 ধাপ নীচে গড়িয়ে যায় তখন শিক্ষার্থীকে পেন্সিলটি আনতে নামতে হবে $13+7=20$ ধাপ। তখন অঙ্কটি দাঁড়াবে, $13-20=$ধাপ সংখ্যা। এখানে 13 থেকে 20 বিয়োগ করা যায় না। তবে দিক পরিবর্ত্তন এর পরিপ্রেক্ষিতে একে বিচার করা যায়। যেমনঃ শিক্ষার্থী মোড়ের প্রশস্ত জায়গা থেকে 13 ধাপ ওপরে ওঠবার পর 20 ধাপ নীচে নেমে অর্থাৎ প্রশস্ত জায়গা থেকে 7 ধাপ নীচে নামতে হয়েছে। তাহলে ধাপসংখ্যা$=13-13-7=-7$ ।

যদি শিক্ষার্থী 7 ধাপ ওপরে উঠে আবার 13 ধাপ ওপরে উঠতো তখন সে যেখানে দাঁড়াতো সেটি হ'ল $+7+13=+20$ ধাপ ওপরে। সুতরাং যোগচিহ্ন এবং বিয়োগচিহ্ন শুধু যোগ এবং বিয়োগেই বোঝায় না, দিক পরিবর্ত্তনকেও বোঝায়। তাই, যোগ বা বিয়োগচিহ্নযুক্ত সংখ্যাকে **দিক্ নির্দে শক** (Directed) সংখ্যাও বলা হয়।

কেবলমাত্র **'ওপর' ও 'নীচ' এই দুই দিক নির্দেশ ছাড়াও দিক নির্দেশক সংখ্যা অন্য প্রকার গতি ও মাপ** প্রকাশ করে। যেমন: ডানদিকে বা বামদিকে, সামনে বা পেছনদিকের গতি। সুতরাং যখন কোন ও সংখ্যা দিকবিশেষে গতি বা দূরত্ব নির্দেশ করে, অর্থাৎ ওপরে বা নীচে, সামনে বা পেছনে, ডানদিকে বা বামদিকের গতি নির্দেশ করে কিংবা আগে বা পরে, জমা বা খরচ, লাভ বা লোকসান নির্দেশ করে তখন এই প্রকাশের জন্য সংখ্যাটীর আগে যোগ বা বিয়োগ-এর চিহ্ন বসাতে হয়—শুধু বোঝাতে হয় যে কোন্ দিক নির্দেশ করছে—তখনই এই চিহ্নযুক্ত সংখ্যাকে দিক নির্দেশক সংখ্যা বলা হয়।

দিক নির্দে শক সংখ্যার যোগ ও বিয়োগ :

প্রঃ। সিঁড়ির মোড়ের প্রশস্ত জায়গা থেকে 5 ধাপ ওপরে উঠে একটী ছেলে আর 14 ধাপ নেমে এল। শেষে প্রশস্ত জায়গা থেকে কোথায় রইল ?

উঃ। $+5-14=-9$......(1)

প্রঃ। সিঁড়ি বেয়ে 5 ধাপ ওপরে উঠলে ছেলেটি একটী ঘরের দরজায় যেতে পারতো। কিন্তু সে ভুলে 14 ধাপ উঠে গেল। তার গন্তব্যস্থানে যেতে হলে সে এখন কি করবে?

গন্তব্যস্থান : $+5-14=-9 \cdots\cdots (2)$

অর্থাৎ তাকে 9 ধাপ নেমে আসতে হবে।

এখন এই যোগও বিয়োগ চিহ্নকে দিক নির্দেশক হিসাবে সতর্কতার সঙ্গে ব্যবহার করা যায়।

যখন দিক নির্দেশক হিসাবে ব্যবহার করা হবে তখন একটা বন্ধনীর ভেতর ঐ চিহ্ন সমেত লিখলে বোঝা যাবে কোন দিক নির্দেশ করছে। যেমন :

(1) অঙ্কটীতে লেখা যায় : $(+5)+(-14)=-9$

(2) অঙ্কটীতে লেখা যায় : $(+5)-(+14)=-9$

প্রথমটিতে একটী গতির দুইটী অংশ রয়েছে। সেই দুই অংশের যুক্ত উৎপন্ন ফল বার করতে হবে। সেজন্য দুই বন্ধনীর মাঝের যোগ চিহ্নটি এখানে সংখ্যা দুটীর যোগ বোঝায়।

দ্বিতীয়টীতে যুক্ত উৎপন্ন ফল দেওয়া আছে ও গতির একটা অংশ দেওয়া আছে। গতির অপর অংশটি বার করতে হবে। $+5$ হচ্ছে যুক্ত উৎপন্ন ফল ও $+14$ হচ্ছে গতির একটি অংশ। গতির অন্য অংশটি বার করতে হবে। সুতরাং এখানে এই দুই বন্ধনীর মাঝের যোগও বিয়োগ চিহ্ন সমস্যার রূপই প্রকাশ করছে। যখন আমরা ঠিক অংকের গণনার কাজ করি তখন একথা ভাবি না। যদি মাঝে যোগের চিহ্ন থাকে তবে পরের দিক নির্দেশক সংখ্যাটী যে চিহ্ন সমেত আছে সেই চিহ্ন সমেতই রাখতে হয়। কিন্তু যদি দুই বন্ধনীর মাঝে বিয়োগচিহ্ন থাকে তবে পরের বন্ধনীর ভেতর দিকনির্দেশক সংখ্যাটীর আগে যে চিহ্ন আছে, সেই চিহ্নটী বদলাতে হবে; অর্থাৎ বিয়োগ চিহ্ন থাকলে যোগ চিহ্ন হবে এবং যোগচিহ্ন থাকলে বিয়োগ চিহ্ন হবে।

সুতরাং বীজগণিতের যোগ অর্থে বোঝায় যে, একটী রেখার ওপর একটি মূল উৎপত্তি বিন্দু থেকে গতি বা দুরত্বের যোগফল, যে গতি বা দূরত্ব সামনের দিকে কিংবা পেছনের দিকে হতে পারে, আর তাদের যুক্ত উৎপন্ন ফল ঐ অংশগুলির প্রত্যেকটির থেকে বড়ও হতে পারে আবার ছোট হ'তে পারে।

বীজগণিতের বিয়োগ অর্থে বোঝায় যে, একটি রেখার মূল উৎপত্তিবিন্দু থেকে দুটি অংশের গতি বা দূরত্বের যোগফল দেওয়া আছে ও এক অংশের গতি বা দূরত্বের মাপ দেওয়া আছে, অন্য অংশটি বার করতে হবে।

নিম্নলিখিত চার্টের মাধ্যমেও যোগ বিয়োগ শেখানো যায় :

যোগ-চার্ট

যোগ অঙ্ক	গণনার আরম্ভ বিন্দু	কত যোগ করতে হবে	দিক নির্দেশ	উত্তর
$(+7)+(+2)$	$+7$	$+2$	ডান দিক	$+9$
$(+7)+(-2)$	$+7$	-2	বাম দিক	$+5$
$(-7)+(+2)$	-7	$+2$	ডান দিক	-5
$(-7)+(-2)$	-7	-2	বাম দিক	-9

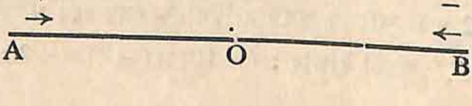
বিয়োগ-চার্ট

বিয়োগ অঙ্ক	গণনার আরম্ভ বিন্দু	কত বিয়োগ করতে হবে	দিক নির্দেশ	উত্তর
$(+7)-(+2)$	-7	$+2$	বাম দিক	$+5$
$(+7)-(-2)$	$+7$	-2	ডান দিক	$+9$
$(-7)-(+2)$	$+7$	$+2$	বাম দিক	-9
$(-7)-(-2)$	-7	-2	ডান দিক	-5

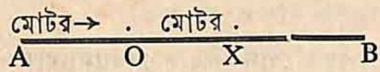
দিকনির্দেশক সংখ্যার গুণ ও ভাগ :

রেখাচিত্র দিয়ে বীজগণিতের গুণ ও ভাগ শেখানো যেতে পারে।

'O' বিন্দুটি হ'ল মূল মধ্যবিন্দু। A থেকে AB-র দিক হ'ল ধনাত্মক এবং B থেকে **BA-র দিক হ'ল ঋণাত্মক দিক। 'O' বিন্দুতে পৌঁছাবার আগের সময় ধরা হবে ঋণাত্মক** এবং **O বিন্দুতে পৌঁছাবার পরের সময় ধরা হবে ধনাত্মক।**

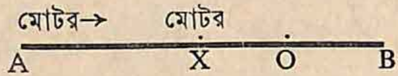


(a) একটা মোটর গাড়ী A থেকে B-র দিকে ঘণ্টায় 10 কিমি. গতিতে যাচ্ছে, 'O' বিন্দু ছাড়বার পর 2 ঘণ্টা পরে গাড়ীটা কোথায় থাকবে ?



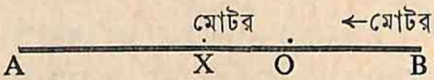
এখানে A থেকে B-র দিকে যাচ্ছে, সেজন্য দিকটা ধনাত্মক এবং 10 কিমি ধনাত্মক বলে ধরা হবে। আবার 'O' বিন্দু ছাড়বার 2 ঘণ্টা পরে গাড়ীর অবস্থান নির্ণয় করতে হ'লে 2 ঘণ্টাকেও ধনাত্মক বলে ধরতে হবে। গাড়ীর 2 ঘণ্টা পরে 'X' বিন্দুতে থাকবে। তাহলে অঙ্কটি হবে : $(+10)\times(+2)=+20$......(1)

(b) গাড়ীটি A থেকে B দিকে যাচ্ছে, 'O'তে পৌঁছাবার 2 ঘণ্টা আগে গাড়ীটি কোথায় থাকবে ?



A থেকে B দিকে যাচ্ছে সেজন্য গতির হার $+10$. 'O'তে পৌঁছাবার 2 ঘণ্টা আগে সময় হবে -2. সুতরাং অঙ্কটি দাঁড়াবে $(+10)\times(-2)=-20$····· (2)

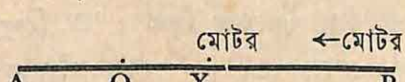
(c) গাড়ীটি B থেকে A-র দিকে যাচ্ছে। তাহলে 'O'-তে পৌঁছবার 2 ঘণ্টা পরে গাড়ীটা কোথায় থাকবে ?



B থেকে গাড়ী A দিকে যাচ্ছে বলে গতি হবে ঋণাত্মক অর্থাৎ -10। তাহলে 'O'-তে পৌঁছাবার 2 ঘণ্টা পরের অবস্থান হিসাবে সময় হবে ধনাত্মক অথবা $+2$।

∴ অঙ্কটি হ'ল $(-10)\times(+2)=-20$······(3)

(d) গাড়ীটি B থেকে A-র দিকে যাচ্ছে। 'O'-তে পৌঁছাবার 2 ঘণ্টা আগে গাড়ীটি কোথায় থাকবে ?



B থেকে গাড়ী A-র দিকে যাচ্ছে বলে গতি হবে ঋণাত্মক অর্থাৎ -10। 'O'-তে পৌঁছাবার 2 ঘণ্টা আগের অবস্থান হিসাবে সময় হবে ঋণাত্মক অর্থাৎ -2 ঘণ্টা।

∴ অঙ্কটা দাঁড়ায় : $(-10)\times(-2)=+20$......(4)

(1), (2), (3), (4) থেকে সিদ্ধান্তে আসলে :

(a) দুটি ধনাত্মক রাশির গুণকরলে গুণফল ধনাত্মক হবে। $[(+)\times(+)=+]$

(b) একটি ধনাত্মক রাশির সঙ্গে একটি ঋণাত্মক রাশির গুণ করলে গুণফল ঋণাত্মক হবে। $[(+)\times(-)=-$ বা $(-)\times(+)=-]$

(c) দুটি ঋণাত্মক রাশি গুণ করলে গুণফল ধণাত্মক হবে। $[(-)\times(-)=+]$

এর থেকে পাওয়া যায় যে গুণ্য ও গুণক-এর চিহ্ন একজাতীয় হলে ধনাত্মক এবং বিজাতীয় হ'লে গুণফল ঋণাত্মক হবে।

ভাগের বেলায়ও চিহ্ন সংক্রান্ত গুণের নিয়মকে অনুসরণ করতে হবে। যেমন :

(1) $\frac{+}{+}=+$ (2) $\frac{+}{-}$ বা $\frac{-}{+}=-$ (3) $\frac{-}{-}=+$

পাটীগণিত ও বীজগণিত এর গুনন ও ভাগ প্রক্রিয়ার **মধ্যে সাদৃশ্য বিচার :**

গুণন :

পাটীগণিতের নিয়ম : **বীজগণিতের নিয়ম :**

$$\begin{array}{r} 232 \\ 21 \\ \hline 232 \\ 464 \\ \hline 4872 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 232 &= 200+30+2 = 2\cdot10^2+3.10+2 \\ 21 &= 20+1 \qquad = 2.10+1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 4.10^3+6.10^2-4.10 \qquad\quad \\ +2.10^2+3.10+2 \\ \hline 4.10^3+8.10^2+7.10+2 \\ =4872 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x^2+3x+2 \\ 2x+1 \\ \hline 4x^3+6x^2+4x \qquad\; \\ +2x^2+3x+2 \\ \hline 4x^3+8x^2+7x+2 \end{array}$$

[10এর বদলে x বসিয়ে]

ভাগ :

$$\begin{array}{r} 122)\,14762\,(121 \\ 122 \qquad \\ \hline 256 \quad \\ 244 \quad \\ \hline 122 \\ 122 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & 10^2+2.10+1 \\ 10^2+2.10+1 & 10^4+4.10^3+7.10^2+6.10+2 \\ & 10^4+2\,10^3+2.10^2 \\ & - \quad - \quad - \\ \hline & 2\cdot10^3+5.10^2+6.10 \\ & 2.10^3+4.10^2+4\cdot10 \\ & - \quad - \quad - \\ \hline & 10^2+2.10+2 \\ & 10^2+2.10+2 \\ \hline \end{array}$$

$$
\begin{array}{l}
x^2+2x+2 \,\big)\, x^4+4x^3+7x^2+6x+2 \,\big(\, x^2+2x+1 \\
\qquad\qquad\quad\; x^4+2x^3+2x^2 \\
\qquad\qquad\quad\; - \quad - \quad\; - \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\quad 2x^3+5x^2+6x \\
\qquad\qquad\qquad\quad 2x^3+4x^2+4x \\
\qquad\qquad\qquad\quad - \quad\;\; - \quad\;\; - \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x^2+2x+2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x^2+2x+2 \\
\hline
\end{array}
$$

[10এর বদলে x বসিয়ে]

যোগ ও গুণন-এর ক্ষেত্রে বীজগণিতের বিভিন্ন স্বীকৃত নিয়মগুলিকে ব্যাখ্যা করার প্রয়োজন।

যেমন : (১) যোগ ও গুণন হবে বিনিময় নিয়ম বা Commutative Law অনুযায়ী :

উদা. $a+b=b+a$; $ab=ba$

(২) যোগ প্রক্রিয়ার গুণন-এর ক্ষেত্রে

বিচ্ছেদ নিয়ম বা Distributive Law প্রযোজ্য।

উদা : $a(b+c)=ab+ac$ or, $a(b-c)=ab-ac$

(৩) যোগ ও গুণনপ্রক্রিয়াকে সংযোগ নিয়ম বা Associative Law অনুযায়াও ব্যাখ্যা করা যেতে পারে।

উদা : $(a+b)+c=a+(b+c)$

এদের ধারণা আমরা বিন্যাস তত্ত্বের মাধ্যমে প্রয়োজনবোধে Venn Diagram এর পরিপ্রেক্ষিতেও উপস্থাপন করতে পারি। এ সম্পর্কে আমরা 'নতুন পাঠক্রম ও গণিতশিক্ষা' পর্য্যায়ে আলোচনা করেছি।

সূত্র :

বীজগণিতের ক্ষেত্রে সূত্রাবলীর স্থান অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ। সূত্র হ'ল একটী সমতার চিত্র যেখানে চলকের যে কোন মানেই সত্য হবে। সূত্রের সাহায্যে যে কোনো দীর্ঘ ও বৃহৎ তথ্যকে সংক্ষিপ্ত আকারে প্রকাশ করা যায়। যে কোন সূত্র উপস্থাপন করতে হবে আবিষ্কারক পদ্ধতির মাধ্যমে; অর্থাৎ শিক্ষার্থীরা নিজে নিজেই সূত্র আবিষ্কার ও প্রয়োগ করবে, শিক্ষক শুধুমাত্র প্রয়োজনমত সাহায্য ও নির্দেশনা দান করবেন। প্রয়োজনমত জ্যামিতিক চিত্র ও মডেলের সাহায্যে শিক্ষক মহাশয় সূত্রের উপস্থাপনে সচেষ্ট হবেন।

নিম্নলিখিত সূত্রগুলি বিশেষ প্রয়োজনীয় এবং গণিত ও বিজ্ঞানের বিভিন্ন শাখার ক্ষেত্রেও ব্যবহার্য্য।

(1) $A = l \times b$, যখন A = আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল
l = আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য
b = আয়তক্ষেত্রের প্রস্থ

(2) $\Delta = \frac{1}{2} b \times h$, যেখানে Δ = ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল
b = ত্রিভুজের ভূমি
h = ত্রিভুজের উচ্চতা

(3) $A = 2h(l+b)$ যেখানে A = ঘরের চার দেওয়ালের ক্ষেত্রফল
h = ঘরের উচ্চতা
l = ঘরের দৈর্ঘ্য
b = ঘরের প্রস্থ

(4) $A = \pi r^2$, যখন A = বৃত্তের ক্ষেত্রফল
r = বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ
$\pi = \frac{22}{7}$

(5) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(6) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

(7) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

উৎপাদক : পাটীগণিতে শিক্ষার্থীরা উৎপাদক সম্পর্কে মোটামুটি ধারনা লাভ করেছে ; উৎপাদককে প্রয়োগ করতে শিখেছে। সুতরাং পাটীগণিতের ধারণার সাধারণীকরণ হিসাবেই বীজগণিতের উৎপাদককে উপস্থাপন করা উচিত। বীজগণিতের উৎপাদক নির্ণয়ে সূত্রের প্রয়োগও যথেষ্ট সাহায্য করে। উৎপাদক বিশ্লেষণে নক্সা, মডেল, চিত্র প্রভৃতি উপকরণের সাহায্য নেওয়া যেতে পারে।

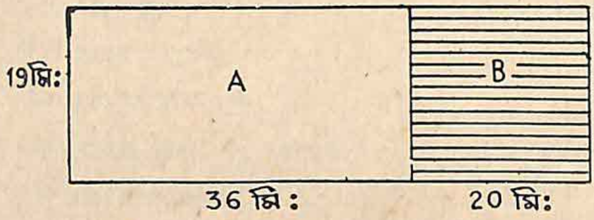
উৎপাদকের ক্ষেত্রে নিম্নের ধারণাগুলি বিশেষ প্রয়োজনীয় :

(1) $ab + ac + ad$ (2) $ax^2 + bx + c$ এবং এর বিশেষ বিশেষ দৃষ্টান্ত যেমন, $a^2 - 2ab + b^2$, $x^2 + px + q$ প্রভৃতি,

(3) $a^2 - b^2$ (4) $a^3 + b^3$ (5) পদসমূহকে দলভুক্ত করা

(6) ভাগশেষ বিষয়ক উপপাদ্য (**Remainder Theorem**) :

নিম্নলিখিত উপায়ে কয়েকটী মূর্ত উদাহরণের মাধ্যমে উৎপাদক বিশ্লেষণের ধারণা প্রদান করা প্রয়োজন :—



একই প্রস্থ ও উচ্চতা বিশিষ্ট দুটী পাশাপাশি ঘরের মেঝে হ'ল A এবং B।

$\therefore\ A=(36\times 19)$ বঃ মিঃ

$B=(20\times 19)$ বঃ মিঃ

$\therefore$ দুটী মেঝের ক্ষেত্রফল $=(36\times 19+20\times 19)$ বঃ মিঃ

যদি ঘরদুটীর সাধারণ দেওয়ালটী সরিয়ে নেওয়া হয় তাহলে মেঝে দুটীর ক্ষেত্রফল দাঁড়ায়, $(36+20)19$ বঃমিঃ

তাহলে, $36\times 19+20\times 19=19(36+20)$

এইভাবে আমরা লিখতে পারি

$$a\times b+a\times c=a(b+c)$$

অনুরূপে মূর্ত উদাহরণের সাহায্যে

$$ac-bc=c(a-b),\ a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

$$\therefore\ a^2-b^2=a^2-b^2+ab-ab=a^2+ab-ab-b^2$$
$$=a(a+b)-b(a+b)=(a+b)(a-b)$$

ax^2+bx+c এর উৎপাদকের ধারণা একটী বিশেষ উদাহরণ এর মাধ্যমে দেওয়া যায় :

যেমন :
$$x^2+6x+8=x^2+6x+9-1$$
$$=(x+3)^2-(1)^2$$
$$=(x+3+1)(x+3-1)$$
$$=(x+4)(x+2)$$

ওপরের দৃষ্টান্তের অনুরূপ বিভিন্ন রাশির উৎপাদক নির্ণয়ের দক্ষতা অভ্যাস-এর মাধ্যমে শিক্ষার্থীরা অর্জন করতে পারে।

বিভিন্ন উপায়ে উৎপাদক নির্ণয়-এর দক্ষতা অর্জনে সহায়তা করা যায়। যেমন :

(1) শূন্যস্থান পূরণ কর :

$$x^2+6x+5$$
$$=(x+3)^2-*$$
$$=(x+3+*)(x+3-*)$$
$$=(x+*)(x+*)$$

(2) "x^2+x+1 রাশিটি কখনই ঋণাত্মক হতে পারে না"—প্রমাণ কর।

এইভাবে আমরা পর্য্যবেক্ষণ, পরীক্ষা, বিশ্লেষণ প্রভৃতির মাধ্যমে বিভিন্ন উৎপাদক নির্ণয়ের পদ্ধতিকে শিক্ষার্থীদের কাছে উপস্থাপন করতে পারি।

সমীকরণ : সমীকরণ সম্পর্কে শিক্ষার্থীদের সঠিক ধারণা দেবার আগে সমীকরণ ও অভেদ-এর মধ্যে পার্থক্য বিচার-করণের শিক্ষা দিতে হবে; যার আলোচনা আমরা আগেই করেছি।

সমীকরণ শেখাতে **ভারসাম্য পদ্ধতি** (Balance method) শিক্ষার্থীদের খুবই উপযোগী। যতক্ষণ দাঁড়িপাল্লার উভয়দিকে একই মাপের জিনিস চাপান যায় ততক্ষণ ওজনে ভারসাম্য থাকবে। মাপবার সময় অজানা জিনিস একদিকে এবং জানা মাপ সব অপরদিকে দিয়ে যখন দুদিকের ভার সমান হবে তখনই অজানা জিনিসের মাপ আপনা আপনি বেরিয়ে আসবে। এথেকে পরিষ্কার বোঝা যায় যে, কি করে অজানা জিনিসটিকে একধারে এনে জানা জিনিস সব আর একধারে নিয়ে যেতে হয়। উদাহরণ হিসেবে বলা যায়, একজন দোকানদার একখণ্ড মাংস ওজন ক'রছে। মাংসখণ্ডটি দাঁড়িপাল্লার একদিকে এবং অপরদিকে এক কিগ্রা. ওজনের বাটখারা রাখলো। দেখা গেল যে, যেদিকে বাটখারা দেওয়া হয়েছে সেদিকটা ঝুঁকেছে বেশী। কাজেই মাংসের খণ্ডটীর সঠিক ওজন পাবার জন্য আর অন্য কোনও চেষ্টা না ক'রে 200 গ্রামের একটি বাটখারা মাংসের পাত্রে চাপানো হ'লো তখন পাল্লা আনুভূমিক অবস্থায় এলো। তার অর্থ : মাংসের ওজন + 200 গ্রা. = 1 কিগ্রা.

সুতরাং 200 গ্রাম ওজন দুদিক থেকে সরিয়ে নিলে একদিকে শুধু মাংস খণ্ড এবং অন্যদিকে থাকে 1 কিগ্রা. − 200 গ্রা. = 800 গ্রাঃ ওজন। সুতরাং 200 গ্রাম পার্শ্বন্তরিত করলে তার চিহ্ন কেন পাল্টে যাবে তা শিক্ষার্থীরা বুঝতে পারবে। পরে এই ধরণের সহজ মৌখিক বা লিখিত অনেক সমস্যা সমাধান করতে দিতে হবে।

এই সমস্যা সমাধানে প্রতিটি ধাপের যুক্তি শিক্ষার্থী অনুধাবন করবে এবং পরে সমস্যা সমাধানে প্রাপ্ত অজানা সংখ্যাটী সমীকরণে বসিয়ে সমাধান সিদ্ধ কিনা বিচার করতে শিখবে। সমস্যাগুলিকে লেখার দিক থেকে শিক্ষার্থী যেন কোন ধাপ অন্ততঃ প্রথম দিকে বাদ না দেয়, তাও লক্ষ্য রাখতে হবে। যেমন :

(1) $16x=48$

বা, $\frac{16x}{16}=\frac{48}{16}$

বা, $x=3$

(3) $\frac{x}{2}=15$

বা, $\frac{x}{2}\times 2=15\times 2$

বা, $x=30$

কিংবা, (2) $20+x=45$ (4) $x-5=16$

বা, $20+x-20=45-20$ বা, $x-5+5=16+5$

বা, $x=25$ বা, $x=21$

পরের দিকে ঐ অঙ্ক কষার সময় শিক্ষার্থীরা করবে :

(1) $16x=48$ (3) $\frac{x}{2}=15$

বা, $x=\frac{48}{16}=3$ বা, $x=15\times2=30$

বা, (2) $20+x=45$ (4) $x-5=16$

বা, $x=45-20=25$ বা, $x=16+5=21$

এইভাবে শিক্ষার্থীরা "সরল সমীকরণের ক্ষেত্রে কোন পদ পার্শ্ব-পরিবর্তন করলে চিহ্ন পরিবর্তন হয়"—এই সাধারণ নিয়মটি সহজেই শিখবে ও প্রয়োগ করতে পারবে।

সহ-সমীকরণ—এই সমীকরণ দুভাবে শেখানো যায় :

(1) **Substitution method :** সমীকরণদ্বয়ের যে কোনটি থেকে অজ্ঞাত রাশিদ্বয়ের একটির মান অপরটির দ্বারা প্রকাশ করা এবং অন্য সমীকরণটিতে প্রথমে উক্ত অজ্ঞাত রাশির জায়গায় এই মান বসিয়ে একটি সমীকরণ গঠন করা ও সমাধান দ্বারা অজ্ঞাত রাশিটির মান নির্ণয় করা—পরে এই সমীকরণ দুটির যে কোন একটিতে এই মান বসিয়ে অবশিষ্ট অজ্ঞাত রাশিটি নির্ণয় করা : যেমন—

$$\left.\begin{aligned} 2x-y&=5 \quad \ldots \quad (1) \\ x+y&=7 \quad \ldots \quad (2) \end{aligned}\right\}$$

(1) থেকে পাওয়া যায় $y=2x-5$

y-র মান (2) এ বসালে, $x+2x-5=7$

বা, $3x=7+5$ বা, $3x=12$

বা, $x=\frac{12}{3}=4$

x-এর মান (1) এ বসালে, $2.4-y=5$

বা, $8-y=5$ বা, $y=8-5=3$

$$\therefore \left.\begin{aligned} x&=4 \\ y&=3 \end{aligned}\right\}$$

(2) **Elimination Method :**

প্রত্যেক সমীকরণ থেকে অজ্ঞাত রাশি দুটীর যে কোন একটি বাদ দেওয়া বা বাদ দেওয়ার ব্যবস্থা করা। যেমন :

$$\left.\begin{aligned} 2x-y&=5 \quad \cdots \quad (1) \\ x+y&=7 \quad \ldots \quad (2) \end{aligned}\right\}$$

(1) ও (2) যোগ করলে yকে বাদ দেওয়া যায়, $\therefore\ 3x=12 \quad \therefore\ x=y$

x-র মান (1) এ বসালে পাই $y=3$

"Truth Set" এর মাধ্যমেও সমীকরণের সমাধান করার প্রচেষ্টা চালাতে হবে। যেমন :

(1) $2x-y=5$ বা, $2x-5=y$

x এর বিভিন্ন মান বসিয়ে y এর বিভিন্ন মান পাই

$$\left.\begin{aligned} x&=1,\ y=-3 \\ x&=2,\ y=-1 \\ x&=3,\ y=\ \ 1 \\ x&=4,\ y=\ \ 3 \\ x&=5,\ y=\ \ 5 \end{aligned}\right\} \text{Truth Set.}$$

এইভাবে উক্ত সমীকরণের Truth Set থেকে নিম্নের Ordered Pairs-গুলি পাই :

$$(1, 3), (2, -1), (3, 1), (4, 3), (5, 5)$$

(2) $x+y=7$

উক্ত উপায়ে, $y=7-x$

$$\left.\begin{aligned} x&=1,\ y=6 \\ x&=2,\ y=5 \\ x&=3,\ y=4 \\ x&=4,\ y=3 \\ x&=5,\ y=2 \end{aligned}\right\} \text{Truth Set.}$$

এখানে Truth Set-এর Ordered Pairগুলি হ'ল (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2)

(1) এবং (2) এর Truth Set-এর Ordered Pair গুলির মধ্যে সাধারণ উপাদান একটী দল অর্থাৎ (4, 3),

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x=4,\ y=3$

এইভাবে Truth Set-এর Ordered Pair গুলির মধ্যে একের বেশী বা অসীম রাশিও থাকতে পারে।

পাটীগণিতের সময় দূরত্ব-বিষয়ক, লাভ-ক্ষতি বিষয়ক, সময়কার্য্য-বিষয়ক, স্টক ও শেয়ার সম্পর্কিত বিভিন্ন সমস্যাগুলি এইভাবে সহসমীকরণের মাধ্যমে সমাধান করা যেতে পারে।

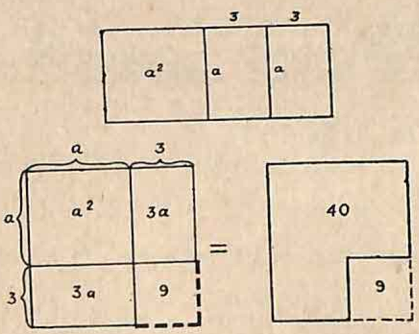
এছাড়া চিত্রলেখ পদ্ধতির সাহায্যেও সহসমীকরণের সমাধান শেখানো যেতে পারে।

দ্বিঘাত সমীকরণ :

নিম্নের সমীকরণটীতে aর মান কিসে সিদ্ধ ?

$$a^2+6a=40$$

$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ সূত্রের জ্যামিতিক চিত্রের ব্যাখ্যার সঙ্গে সমীকরণটী তুলনা করলে দেখা যায় ;



$a^2+6a=40$ সমীকরণের উভয় দিকে বা চিত্রে 9 বর্গ একক যোগ করলে উভয় পক্ষকেই একটী ক'রে পূর্ণ বর্গে প্রকাশ করা যায়। ডান-পক্ষের বর্গ $=49$ বর্গএকক।

$\therefore$ এই বর্গের একবাহু $=7$

(কারণ $\sqrt{49}=7$)

আবার বাম-পক্ষের একটী বাহু (চিত্র থেকে) $=a+3$।

$\therefore \quad a+3=7$

$\therefore \quad a=7-3=4$

সুতরাং a-র একটী মানে সমীকরণটী সিদ্ধ।

$$a^2+6a=40 \quad \text{অর্থাৎ} \quad a=4$$

যেহেতু $\sqrt{49}=\pm 7$; সুতরাং $a^2+6a=40$ সমীকরণ $a=-10$ মানেও সিদ্ধ।

[a-এর মান বসিয়ে পরীক্ষা করা যায়]

দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধান করতে গেলে দুভাবে অগ্রসর হওয়া যায় :

(1) $(x-a)^2-b=0$ or, $(x-a)^2-(\sqrt{b})^2=0$

or $(x-a+\sqrt{b})(x-a-\sqrt{b})=0$

$\therefore$ হয় $(x-a+\sqrt{b})=0$ অথবা $(x-a-\sqrt{b})=0$.

$\therefore \quad x=a\pm\sqrt{b}$

(2) $(x-a)^2=b$ or, $(x-a)^2=(\sqrt{b})^2$

or, $x-a=\pm\sqrt{b}$ or, $x=a\pm\sqrt{b}$.

এই দুটির মধ্যে (2)-এর নিয়মটী বেশী সহজ ও সরল।

এইভাবে $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণে

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ মানটী পেতে পারি বর্গপূরণ ও ভারসাম্য পদ্ধতির মাধ্যমে।

দ্বিঘাত অসমীকরণ :

দ্বিঘাত অসমাকরণ (Inequation) সমাধানের ক্ষেত্রে Truth Set-এর প্রয়োগ বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ : যেমন : অসমতার Truth Set নির্ণয়ের ক্ষেত্রে

$$ax^2+bx+c>0 \quad \text{or,} \quad ax^2+bx+c<0$$

আমরা দেখি যে, যদি এবং শুধু যদি (iff) সংখ্যা দুটী উভয়েই ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হয়, তাহলে তাদের গুণফল হবে ধনাত্মক।

এইরূপে যদি, $ax^2+bx+c=(x-\alpha)(x-\beta)$

তখন $ax+bx+c>0$

যদি $(\alpha>0)$

$\{x:(x-\alpha)>0$ এবং $(x-\beta)>0\}$

বা, $\{x:(x-\alpha)<0$ এবং $(x-\beta)<0\}$

এখন যদি $\alpha>\beta$ হয়, তখন উপরের সর্ত থেকে আমরা পাই,

$\{x:x>\alpha\}\cup\{x:x<\beta\}$

অনুরূপে, $ax^2+bx+c<0$

যদি $(a>0)$

$\{x:(x-\alpha)<0$ এবং $(x-\beta)>0\}$

বা, $\{x:(x-\alpha)>0$ এবং $(x-\beta)<0\}$

কিন্তু, $x>\alpha$ এবং $x<\beta$ অসত্য।

যেহেতু $\alpha>\beta$

সুতরাং নির্ণেয় সমাধান : $\{x:\beta<x<\alpha\}$

রৈখিক অসমীকরণের লেখচিত্র ঃ

$ax^2+by+c>0$ ... (1) অসমীকরণটি বিচার করতে হবে।

আমরা জানি, $ax^2+by+c=0$ ... ... (2)

সমীকরণটী একটী সরলরেখায় প্রকাশ করে, যার ঢাল ও অবস্থান a, b, c-র চিহ্ন ও পরিমাণের উপর নির্ভর করে। যদি (x_0, y_0) বিন্দুটী (2) সরলরেখার উপর অবস্থিত হয়, তাহলে, $ax_0+by_0+c=0$ বা, $by_0=-ax_0-c$.

সুতরাং যদি (1) অসমীকরণে সিদ্ধ একটী বিন্দুর কোটি (ordinate) y হয় এবং ভুজ হয় x_0 তাহলে, $by>-ax_0-c$. এবং তখন, $b(y-y_0)>0$

এইভাবে b ধনাত্মক হলে, $y>y_0$, এবং b ঋণাত্মক হলে $y<y_0$

সুতরাং যদি $b>0$ হয়, এবং (1) অসমীকরণটী (2) সমীকরনের উপরের তলের সমস্ত বিন্দুকে প্রতিনিধিত্ব করে এবং যদি $b<0$ হয়, তাহলে অসমীকরণটী (2) সমীকরণের নীচের সমস্ত বিন্দুকেই প্রতিনিধিত্ব করবে। নীচের এবং উপরের ধারণাটী x-অক্ষরেখার পরিপ্রেক্ষিতে y-অক্ষরেখার অবস্থানের সঙ্গে সম্পর্কযুক্ত।

উপরের উদাহারণটীতে মনে করা হয়েছে যে, যদি y ধনাত্মক হয় তাহলে অনুসারী বিন্দুগুলি x অক্ষরেখার ওপরে হবে।

তাহলে যদি, $ax+by+c\geqslant 0$ হয়, তখন বিন্দুগুলি $ax+by+c=0$ সরলরেখার ওপরেই অবস্থিত বিন্দুগুলির অন্তর্গত হবে।

এক জোড়া অসমীকরণে লেখচিত্র ঃ

যদি একজোড়া অসমাকরণ পাওয়া যায় ঃ যেমন

$$U=a_1x+b_1y+c_1>0$$
$$V=a_2x+b_2y+c_2>0$$

U এবং V এর সমন্বয়ে বিন্দুর এক বিন্যাস পাওয়া যায়। এই ভাবে U অথবা V কিংবা উভয়কেই,

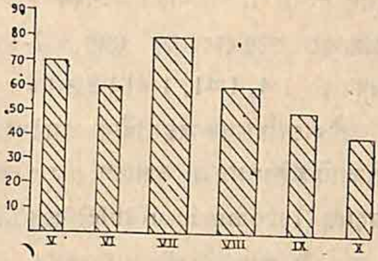
$U\cup V$ হিসাবে প্রকাশ করা হয় ; এবং অনুরূপ ভাবে U এবং V-এর সমন্বয়কে প্রকাশ করা $U\cap V$।

এইভাবে আমরা $U=0$ এবং $V=0$র লেখচিত্র অঙ্কন করতে পারি। তারপর $U>0$ এবং $V>0$র প্রতিনিধিস্বরূপ একদল বিন্দু পাওয়া যেতে পারে এবং পরিশেষে বিন্যাসের সংযোগ বা বিচ্ছেদ প্রক্রিয়ার মাধ্যমে একজোড়া অসমীকরণের সমাধান করতে পারি। এইভাবে দুই বা ততোধিক অসমীকরণের সমাধান আমরা করতে পারি।

আয়তলেখচিত্র (Bar-Graphs and Histograms) :

পরিসংখ্যান তথ্যের প্রকৃতি জানা এবং তাদের উপস্থাপন করার জন্য এই লেখচিত্রের বিশেষ প্রয়োজন।

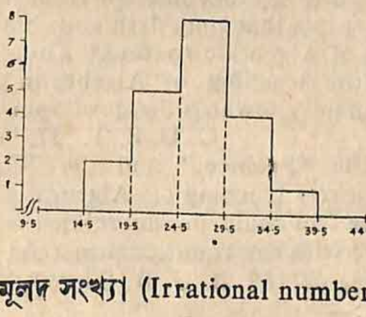
Bar-Graph এবং Histogram উভয়েই আয়ত-লেখচিত্র। তবে Bar-Graph অঙ্কনের কোন বাঁধাধরা নিয়ম নেই। যেমন :



শ্রেণীর ভিত্তিতে ছাত্রসংখ্যার Bar-Graph আঁকতে গেলে Histogram অঙ্কনের সময় আয়তক্ষেত্রের ভূমি হবে যে কোন প্রাপ্ত মান বা ওজন বা দৈর্ঘ্য বা কোন নিরবিচ্ছিন্ন সংখ্যার শ্রেণী-সীমা এবং উচ্চতা হবে প্রতিটি শ্রেণী-সীমার অন্তর্গত পরিসংখ্যান। **যেমন :**

প্রাপ্তমান	শ্রেণীসীমা	পরিসংখ্যান
15—19	14·5—19·5	2
20—24	19.5—24·5	5
25—29	24·5—29·5	8
30—34	29·5—34·5	4
35—39	34·5—39·5	1
		$N=20$

উপরের পরিসংখ্যান বিভাজনটিকে আয়ত লেখচিত্র বা Histogram-এ রূপান্তরিত করতে হলে পার্শ্বের চিত্রটি লক্ষ্য করা প্রয়োজন।



এখানে শিক্ষকমহাশয় আয়তলেখচিত্রের প্রয়োজনীয়তা এবং ব্যবহারিক ক্ষেত্রের প্রয়োগ সম্পর্কে শিক্ষার্থীদের ধারণা দিতে সচেষ্ট হবেন।

অমূলদ সংখ্যা (Irrational numbers) :

যে সমস্ত স্বাভাবিক ও ভগ্নাংশ সম্পর্কিত ধনাত্মক ও ঋণাত্মক সংখ্যাকে একটি সরলরেখার ওপর অবস্থিত বিন্দুর দ্বারা প্রকাশ করা যায় তাদের বলা হয় **মূলদ সংখ্যা** বা Rational numbers। কিন্তু যাদের ঐ ভাবে প্রকাশ করা সম্ভব নয়,

তারাই হ'ল **অমূলদ সংখ্যা** বা Irrational numbers। যেমন $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$ প্রভৃতি জাতীয় সংখ্যা, সে ধনাত্মকই হোক বা ঋণাত্মকই হোক, যাদের রৈখিক দৈর্ঘ্যও বর্তমান অথচ স্বাভাবিক সংখ্যা বা ভগ্নাংশে প্রকাশ করা যায় না।

মূলদ সংখ্যা দুটি স্বাভাবিক সংখ্যার অনুপাতরূপে প্রকাশ করা যায়, কিন্তু অমূলদ সংখ্যাকে যায় না। তবে প্রয়োজন ও ইচ্ছানুযায়ী অমূলদ সংখ্যার কাছাকাছি মূলদ সংখ্যা পাওয়া যায়। যেমন $\sqrt{2}$-এর কাছাকাছি যে কোন মূলদ সংখ্যা নিয়ে ক্রমে ক্রমে তার চেয়ে বড় অথচ $\sqrt{2}$-র চেয়ে ছোট মূলদ সংখ্যা পাওয়া যেতে পারে। যেমন : 1·4, 1·41, 1·414 ইত্যাদি।

পীথাগোরাসের অনুগামীরা আবিষ্কার করেন, বহু বর্গক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্যকে স্বাভাবিক সংখ্যায় বা ভগ্নাংশে প্রকাশ করা যায় না। তাঁরা এই জাতীয় সংখ্যাকে **অমেয়** (Incommensurable) বলে নির্দেশিত করেন।

করণী, π প্রভৃতি সংখ্যা অমূলদ।

বীজগণিতের অন্যান্য বিষয় যেমন, করণী, সূচক-নিয়ম, অপেক্ষক (Function), চিত্রলেখ, লগারিদ্‌ম, সমান্তর-শ্রেণী, গুণোত্তর-শ্রেণী, প্রভৃতির শিক্ষা কিভাবে সহজ উপায়ে চিত্র, মডেল প্রভৃতি উপকরণের মাধ্যমে দেওয়া যেতে পারে তার ব্যবস্থা করতে হবে। শিক্ষককে এ ব্যাপারে হ'তে হবে দক্ষ ও উপায় উদ্ভাবনে পরিপক্ক।

বীজগণিত শিক্ষণে মনে রাখতে হবে বীজগণিত হ'ল পাটীগণিত-এর সাধারণীকরণ এবং সংখ্যার বদলে প্রতীকের উপস্থাপন ও সমীকরণের মাধ্যমে সমস্যার সমাধান ; যার মাধ্যমে শিক্ষার্থী তার দৈনন্দিন জীবনের সমস্যা সমাধানের ইঙ্গিত পেতে পারে।

প্রশ্নাবলী

1. "The central topic of Algebra is, beyond question the equation and its application. It is this that puts flesh and blood upon the dry bones of the skeleton of Algebraic routine." Discuss, illustrating with examples, how the teaching of Algebra in the early stages should be directed mainly towards the development of the concept of equation. [C. U. B. T. '57, '67]

2. Compare with examples the "Problem" and the "Formula" methods of approach to the early teaching of Algebra and show how and to what extent the two could be correlated with advantages. How do they compare with the traditional method of approach ? [C. U. B. T. 58, '64, '68, '69, B. U. B. Ed. '67, '69]

3. Write Pedagogical notes on :—

(a) Directed Numbers or Signed Numbers and its application. (b) Equation and Inequations. (c) Histogram and Bar-Graphs. (d) Set-theory in solving Simultaneous equation. (e) Quadratic equation. (f) Irrational numbers.

দ্বাদশ অধ্যায়

জ্যামিতি শিক্ষণ (Teaching of Geometry)

জ্যামিতির উদ্ভব ও বিকাশ (Origin and Development of Geometry):

জ্যামিতি শব্দটি ইংরেজী Geometry শব্দের আক্ষরিক অনুবাদ। ব্যুৎপত্তিগত অর্থে জ্যামিতি শব্দের অর্থ **জমি-জরীপ**। জ্যা অর্থ পৃথিবী এবং মিতি অর্থ হচ্ছে পরিমাপ। তেমনি Geo অর্থ **পৃথিবী** এবং Metry অর্থ **মাপা**। তাই পুরো শব্দটির অর্থ হ'ল **পৃথিবীর পরিমাপ করা**। প্রত্যেক দেশেই **ক্ষেত্র পরিমাপের মধ্য দিয়েই জ্যামিতির সৃষ্টি হয়েছে।**

বৈদিক যুগ

আমাদের দেশে **বৈদিক যুগে** যাগযজ্ঞের প্রয়োজনে বেদী তৈরী করতে গিয়ে ত্রিকোণ, চতুষ্কোণ প্রভৃতি নানা জ্যামিতিক আকৃতির ব্যবহারের কথা জানা যায়। প্রসিদ্ধ গণিতজ্ঞ ভাস্কর তার বই 'লীলাবতী'তে দেয়াল, পুষ্করিণী, কূপ, ছায়া প্রভৃতির ব্যাপারে জ্যামিতি প্রয়োগের নিদর্শন দেখিয়েছেন।

মিশর ও গ্রীসদেশ

মিশরদেশের ইতিহাস থেকে দেখা যায় যে নীলনদের প্লাবনের পর জমি বণ্টন ও হিসাব রাখতে এবং বাঁধ তৈরী করতে গিয়ে বিভিন্ন রকমের পরিমাপের প্রয়োজন হয়। তার ভেতর দিয়েই জ্যামিতির উন্নতি। অভিজ্ঞতা থেকেই জ্যামিতির নানাপ্রকার নিয়মের আবিষ্কার। মিশরের পিরামিডগুলো পরিমাপ-সংক্রান্ত সূক্ষ্ম হিসাব ব্যবহারের প্রাচীনতম নিদর্শন। রোমের নগর তৈরীর পরিকল্পনাতেও জ্যামিতির প্রয়োগ রয়েছে। **গ্রীস দেশে** জ্যামিতির উন্নতি ঘটে বিভিন্ন শিল্পকলার উন্নতির মধ্য দিয়ে। **জ্যামিতির বিকাশে প্রাচীন গ্রীক দার্শনিকদের অবদান অনস্বীকার্য্য**। প্রথম **'প্রমাণ-সাপেক্ষ জ্যামিতি'র** প্রচলন করেন পরমাণুবাদী **দার্শনিক থেলস** (Thales) [খৃঃ পূঃ 624 – 547]। তিনি প্রায় ছটি প্রতিজ্ঞা প্রমাণ করেন। এর মধ্যে অর্ধবৃত্তস্থ কোণ-সমকোণ, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয় পরস্পর সমান প্রভৃতিগুলি অন্যতম। Thales এর পর **পীথাগোরাস** (খৃঃ পূঃ 548—495) জ্যামিতিকে একটি যুক্তি বিজ্ঞানে পরিণত

করেন। এরা তাই **যুক্তিসিদ্ধ জ্যামিতির** (Logical Geometry) জনক হিসাবে খ্যাত। সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ-সংক্রান্ত উপপাদ্যটি **"পীথাগোরাসের উপপাদ্য"** নামে পরিচিত। এর মাধ্যমে তিনি $\sqrt{2}$ এর ধারণা দেবার চেষ্টা করেন। পীথাগোরাসের প্রভাবে প্রভাবিত হ'য়ে, Plato ঘোষণা করলেন "Geometry draws the soul towards truth". Plato বিশ্বপ্রকৃতির মধ্যেই জ্যামিতির পরিচয় উপলব্ধি করেন। সেদিক থেকে প্রাচীন গ্রীক দার্শনিকরাই প্রথম যুক্তিসিদ্ধ বিজ্ঞান হিসাবে জ্যামিতিকে প্রতিষ্ঠা করেন। তাঁরাই বিমূর্ত জ্যামিতির স্রষ্টিকর্তা।

ইউক্লিড ও জ্যামিতির বিকাশ

পরবর্তীকালে ইতস্ততঃ বিক্ষিপ্ত উপাদান সমূহ সংগ্রহ করে Euclid [খৃঃ পূঃ 300] প্রথম বৈজ্ঞানিক দৃষ্টিভঙ্গীতে বিষয়টিকে ধারাবাহিক ভাবে ও যুক্তিগ্রাহ্যরূপে উপস্থাপন করেন। তিনি পূর্বপ্রকাশিত সমস্ত তত্ত্ব ও উপপাদ্য-সমূহকে একটা সামগ্রিক ও সুবিন্যস্ত রূপ দেবার চেষ্টা করেন। এর জন্য তাঁকে কয়েকটি মৌলিক প্রস্তাবকে **স্বতঃসিদ্ধ** (Axioms) হিসাবে ধরতে হয় এবং তাদের ওপর ভিত্তি করে বিভিন্ন যুক্তির মাধ্যমে **স্বীকার্য্য** (Postulates) ও অবরোহমূলক প্রতিজ্ঞা বা উপপাদ্যের আকারে একটি কাঠামো তৈরী করতে হয়। জ্যামিতি তাই স্বীকৃত গাণিতিক যুক্তিবিজ্ঞান। রেখা, তল, ঘন, ত্রিভুজ—প্রভৃতি জ্যামিতির কল্পনামাত্র। এদের নিয়েই তৈরী হয়েছে সনাতনী **ইউক্লিড জ্যামিতি** (Euclid Geometry)। ইউক্লিডের তের খণ্ডে সম্পূর্ণ প্রায় পাঁচশ উপপাদ্য সম্বলিত বিখ্যাত পুস্তক 'Elements' প্রায় দুহাজার বছর ধরে শিক্ষাজগতে প্রাধান্য বিস্তার করে এসেছিল। Euclid এর 'Elements' এর তেরটি খণ্ডের বিষয় বস্তু হ'ল : ১ম, ২য়, ৩য় এবং ৪র্থ খণ্ডে **দ্বিমাত্রিক জ্যামিতি** (Plane Geometry), ৫ম খণ্ডে **অনুপাত** (Theory of Proportion), ৬ষ্ঠ খণ্ডে সদৃশ চিত্রের **জ্যামিতি** (Geometry of similar figures), ৭ম, ৮ম ও ৯ম খণ্ডে **সংখ্যাতত্ত্ব ও পাটীগণিত** (Theory of numbers and Arithmetic), ১০ম খণ্ডে **অমেয় সংখ্যাতত্ত্ব** (Theory of incommensurable), ১১শ ও ১২শ খণ্ডে **পিরামিড, প্রিজম, শঙ্কু, গোলক প্রভৃতি ত্রিমাত্রিক বস্তুর নানা ধর্ম** (Elementary theorems and metrical relations of the pyramid, prism, cone, cylinder, sphere etc), এবং ১৩শ খণ্ডে **সুষম বহুভুজ ও বহুতল বিশিষ্ট ত্রিমাত্রিক ঘনবস্তুর ধর্ম** (Properties of regular polygons and regular solids) সম্পর্কে। এই গ্রন্থের বিষয়বস্তু সম্পর্কে Euclid এর নিজস্ব অবদান কতখানি তা বলা কঠিন। তবে একথা বলা যায় যে এই পুস্তকের মাধ্যমে

Euclid তাঁর পূর্বসূরীদের সৃষ্ট গণিতশাস্ত্রের একটা সুসংহত সংকলনের চেষ্টা করেছিলেন।

পরবর্তীকালে Euclid Geometry-র বহু অসঙ্গতি ও অসম্পূর্ণতা ধরা পড়ে এবং আবিষ্কৃত হয় Non-Euclidean Geometry। বৃহত্তর স্থান কালের গণিতের ক্ষেত্রে Euclid Geometry-র অসারতা প্রমাণ করে গড়ে ওঠে **সাধারণ স্বতঃসিদ্ধভিত্তিক বহু জ্যামিতি**। Non-Euclidean Geometry এরূপ এক স্বতঃসিদ্ধভিত্তিক জ্যামিতি। Euclid জ্যামিতির স্বতঃসিদ্ধান্তগুলির মধ্যে সমান্তরাল সংক্রান্ত স্বতঃসিদ্ধটির বদলে বিকল্প স্বতঃসিদ্ধ নিয়ে যে যুক্তিসিদ্ধ ও অবরোহমূলক জ্যামিতির উদ্ভব হয় তারই নাম Non-Euclidean Geometry।

অ-ইউক্লিডীয় জ্যামিতি

এছাড়াও বহু বিজ্ঞানী যুক্তির সামঞ্জস্য বজায় রেখে মৌলিক স্বতঃসিদ্ধকে খুশীমত পরিবর্তন করে সম্পূর্ণ নতুন জ্যামিতির উদ্ভাবন করেছেন। আধুনিক জ্যামিতিতে জার্মান বিজ্ঞানী **মরিস প্যাস** (Morish Pasch), ইতালীয় **বিজ্ঞানী পিয়ানো** (Peano), **স্যাকারি** (Saccheri), জার্মান বিজ্ঞানী **গাউস** (Gauss), রুশ বিজ্ঞানী **লোবাচেভাস্কি** (Lobachevski), জার্মান বিজ্ঞানী **হিলবার্ট** (Hilbert), **রীম্যান** (Reimann), রুশবিজ্ঞানী **বোলাই** (Bolyai), **ক্লেইন** (Klein), প্রভৃতিদের নাম উল্লেখযোগ্য। এঁদের মধ্যে অনেক বিজ্ঞানী **জ্যামিতিকে তিনমাত্রার মধ্যে সীমাবদ্ধ না রেখে চতুর্মাত্রিক জ্যামিতির সৃষ্টি করে জ্যামিতিশাস্ত্রকে এক বস্তুবাদী দেশের রূপবিচারে সহায়ক হন।**

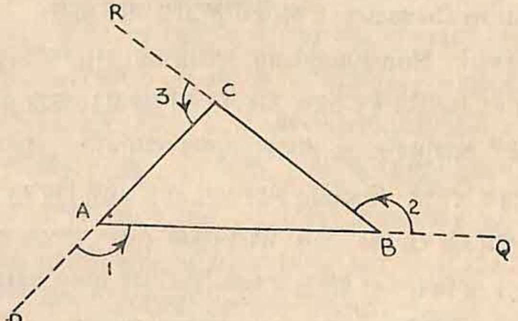
Non-Euclidean Geometry (অ-ইউক্লিডীয় জ্যামিতি)

গণিতের ইতিহাসে Non-Euclidean জ্যামিতির আবিষ্কার এক যুগান্তকারী ও বৈপ্লবিক ঘটনা। মিশরীয় যুগ থেকে সাধারণ অভিজ্ঞতার ক্ষেত্রে বা ভৌত স্থান পরিমাপের ক্ষেত্রে, স্বজ্ঞামূলক ও আরোহীমূলক জ্যামিতির প্রমাণসিদ্ধ জ্ঞানকে উপলব্ধি ও সমন্বয়ের ক্ষেত্রে Euclid নির্দেশিত পথই ছিল চিরন্তন ও যুক্তিসঙ্গত। সেইজন্য বিখ্যাত গণিতজ্ঞ Gauss তাঁর সমালোচনা প্রকাশ করতে ভরসা পাননি। দুহাজার বছর ধ'রে যে বিশ্বাস বা ধারণা বদ্ধমূল ছিল সেটি হ'ল, "**স্থান ইউক্লিডকে অনুসরণ করে এবং ইউক্লিড স্থানকে অনুসরণ করে**"। এই ধারণার মূলে কুঠারাঘাত করলেন জার্মান গণিতজ্ঞ Gauss, রাশিয়ান গণিতজ্ঞ Lobachevsky এবং Bolyai। পরে অদ্বিতীয় গণিতজ্ঞ Reimann সাধারণভাবে Non-Euclidean জ্যামিতির প্রতিষ্ঠা করেন। অবশ্য এর আগে মধ্যযুগে আরব গণিতজ্ঞ Nasir-ed-din

ও অষ্টাদশ শতাব্দীর গণিতজ্ঞ Legendre, Lamberd ইউক্লিডের পঞ্চম স্বীকার্য্যটীকে প্রমাণ করার চেষ্টা করেন এবং Non-Euclidean জ্যামিতি প্রতিষ্ঠার সূচনা করেন।

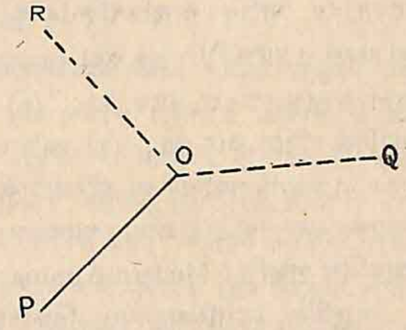
Euclid এর **পঞ্চম স্বীকার্য্যে** বলা হয়েছে যে, "একটি প্রদত্ত সরলরেখার বহিঃস্থ কোন বিন্দু দিয়ে ঐ সরলরেখার সমান্তরাল রেখা একটি মাত্র টানা যেতে পারে"। Euclid এর স্বতঃসিদ্ধ ও স্বীকার্য্যের মধ্যে সম্পর্কটি খুব পরিষ্কার নয়। অনেকে ধারণা করেন যে Eucilid যখন তাঁর বিবৃতিকে স্বতঃসিদ্ধ না বলে স্বীকার্য্য বলেছেন তখন এটী স্বাধীন হওয়া সম্পর্কে তাঁর নিজেরই সন্দেহ ছিল। সেই জন্যই দু'হাজার বছর ধরে বহু গণিতজ্ঞ এই স্বীকার্য্যটিকে অন্যান্য স্বতঃসিদ্ধগুলির সাহায্যে প্রমাণে সচেষ্ট হন এবং স্বাধীন বলে গ্রহণ করেন। তারই ফলশ্রুতি হিসাবে বিকল্প স্বতঃসিদ্ধের মাধ্যমে আবিষ্কৃত হয় Non-Euclidean জ্যামিতি। একেই আমরা **সাধারণ জ্যামিতি হিসাবেও আখ্যা দিয়ে থাকি।** Euclid এর পঞ্চম স্বীকার্য্যকে ছেড়ে দিয়ে অন্যান্য স্বীকার্য্যগুলিকে নিয়ে Euclidean পদ্ধতিতে গঠিত জ্যামিতিকেই সাধারণভাবে Non-Euclidean জ্যামিতি বলা হয়। সুতরাং এরূপ Non-Euclidean জ্যামিতিতে পঞ্চম স্বীকার্য্যটির সাহায্য না নিয়েই Euclidean জ্যামিতির অন্যান্য প্রতিজ্ঞাগুলি প্রমাণ করা উচিত। যেমন: Non-Euclidean পদ্ধতিতে **"ত্রিভুজের কোণ-ত্রয়ের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান" প্রমাণ করতে হবে।**

Euclid পঞ্চম স্বীকার্য্যের সাহায্যে উপরের প্রতিপাদ্যটি প্রমাণ করেন। এখন পঞ্চম স্বীকার্য্যের সাহায্য ব্যতিরেকে "একটি পূর্ণ আবর্তনের পরিমান চার সমকোণ" —এই ধারণার দ্বারাই উপপাদ্যটি প্রমাণ করতে হবে।



মনে করি, ABC ত্রিভুজের তিনটী অন্তঃকোণ A, B, C, এর সমষ্টি দুসমকোণের সমান প্রমাণ করতে হবে। এখন A, B, C তে অন্তঃকোণ ও বহিঃকোণের মোট পরিমাণ $2 \times 3 = 6$ সমকোণ।

মনে করি এক ব্যক্তি O বিন্দুতে AP-র দিকে তাকিয়ে ক্রমশঃ বাম আবর্তে ঘুরে BQ-র দিকে ফিরল ; আবার বাম আবর্তে ঘুরে CR-র দিকে এবং অনুরূপভাবে বাম আবর্তে ঘুরে পুনরায় AP-র দিকে এল। তাহলে সে মোট $\angle POQ + \angle QOR + \angle ROP$ কোণ ঘুরবে ; অর্থাৎ সে বহিঃস্থ কোণগুলির মোট পরিমাণ ঘুরবে। কিন্তু এক সম্পূর্ণ আবর্তন হওয়ায় সে মোট চার সমকোণ ঘুরবে ; অর্থাৎ বহিঃস্থ কোণগুলি (1+2+3)-র সমষ্টি হবে 4 সমকোণ। সুতরাং অন্তঃকোণগুলির মোট পরিমাণ 2 সমকোণ।



সসীম ও ব্যবহারিক স্থানের পরিমাণ ও অন্যান্য ধর্ম নির্ণয়ের ক্ষেত্রে Euclid জ্যামিতির প্রয়োগ দেখা গেলেও বৃহত্তর স্থান ও দেশের ব্যাখ্যায়, পরিবর্তনশীল জগতের পরিমাপের ক্ষেত্রে, সময়-এর বিবেচনায় Euclid জ্যামিতি অচল। তাঁর মতে যে কোন স্থানগত চিত্র স্থির ও অপরিবর্তনীয়। কিন্তু আইনষ্টাইন তাঁর Theory of Relativity-তে স্থান ও কালের মধ্যে সাপেক্ষধর্মিতার অস্তিত্ব প্রমাণ করেছেন। সুতরাং পরিবর্তনশীল দেশ কালের জগৎকে অপরিবর্তনীয় ও স্থির জ্যামিতির এককের মাধ্যমে ব্যাখ্যা করলে তা নির্ভুল হতে পারে না। তবে Euclid জ্যামিতি হ'ল একটী আনুমানিক ধারণা। তাই স্থূল ও সীমাবদ্ধ স্থানের ব্যাখ্যায় Euclidean জ্যামিতির প্রয়োগে খুব একটা অন্যায় বা ভুল হবে না।

ইউক্লিড জ্যামিতি (Euclid Geometry) :

ইউক্লিড জ্যামিতি বিন্দু, রেখা, তল, কোণ, ক্ষেত্র প্রভৃতি কতকগুলি মৌলিক ধারণার সংজ্ঞা থেকে সুরু। এর মধ্যে বিন্দু ও রেখার ধারণাই প্রধান। এদের সাহায্য নিয়েই জ্যামিতির অন্যান্য বিষয় ও ধর্মগুলি উপস্থাপন করা হয়। ইউক্লিডীয় জ্যামিতি হ'ল সংজ্ঞা, স্বীকার্য্য ও যুক্তিপদ্ধতির সমন্বয়ের ফলশ্রুতি। তবে বিভিন্ন শিক্ষাবিদ Euclid পদ্ধতিতে বা যুক্তিমূলক পদ্ধতিতে জ্যামিতি শিক্ষাদান প্রসঙ্গে বলেন : (১) মানসিক উৎকর্ষের সহায়ক (২) সংক্ষিপ্ত চিন্তা ও যুক্তি ব্যবহারের দক্ষতা অর্জনের সহায়ক (৩) সময় সংক্ষেপকারক (৪) বিভিন্ন সত্য আবিষ্কারের সহায়ক (৫) নৈতিক ও চারিত্রিক উন্নতির সহায়ক। এই পদ্ধতির বিরুদ্ধে

শিক্ষা মনোবিজ্ঞানীদের বক্তব্য হ'ল: (১) পদ্ধতিটী অমনোবৈজ্ঞানিক; কারণ বিন্দু, রেখা প্রভৃতিগুলির প্রকৃত সংজ্ঞা দেওয়া অসম্ভব। যার ফলে জ্যামিতি শিক্ষণ হয় যান্ত্রিক ও স্মৃতিশক্তি-নির্ভর; (২) বিষয়বস্তুর সংযোজন ব্যবহারিক-অভিজ্ঞতা ও দৃষ্টিভঙ্গীভিত্তিক করা হয় না; (৩) শিক্ষাকার্য্যে শিশুর আগ্রহ ও প্রকৃতির সঙ্গে সামঞ্জস্য থাকে না; (৪) বিমূর্ত চিন্তার বোঝা শিশুর স্বাভাবিক মানসিক গতিকে করে ক্ষুণ্ণ; (৫) জ্ঞান হয় বিচ্ছিন্ন ও অসংবদ্ধ; (৬) আরোহী-মূলক না হওয়ায় পদ্ধতিটী হয় অবৈজ্ঞানিক এবং (৭) যুক্তি ও সংজ্ঞা-নির্ভর হ'লেও প্রত্যক্ষ-নির্ভর পদ্ধতিরই প্রাধান্য থাকে এবং ধারণা হয় অস্পষ্ট।

আধুনিক পদ্ধতি (Modern Approach):

আধুনিক মনোবিজ্ঞানসম্মত শিক্ষাপদ্ধতি পাঁচটী বিষয়ের ওপর নির্ভরশীল: (১) শিশুর আগ্রহ (২) তার দক্ষতা, সম্ভাবনা ও পরিণমন (Maturation) (৩) তার প্রয়োজনবোধ (৪) প্রত্যক্ষ ও মূর্ত উপকরণ ও সম্ভাবনা সমন্বিত পরিবেশ ও কিছু কিছু কাজ করার সুযোগ এবং (৫) শিক্ষকের সহযোগিতা ও বিষয়বস্তু উপস্থাপনের পদ্ধতি। কৈশোরকাল পর্য্যন্ত শিশুরা খেলার মাধ্যমেই বা কাজের মাধ্যমেই শিক্ষালাভ করতে ভালোবাসে। Gestalt মত অনুসারে **সমগ্রের সঙ্গে সম্বন্ধযুক্ত করেই অংশ সম্বন্ধে শিক্ষা দেওয়া উচিত**। সুতরাং জ্যামিতির ক্ষেত্রে বিন্দু, রেখা, প্রভৃতি থেকে সুরু না ক'রে ঘনবস্তু ও অন্যান্য মূর্ত এবং বাস্তব জিনিষের মাধ্যমে শিক্ষণ সুরু করা উচিত। এতে **"জানা থেকে অজানা"** বা **"মূর্ত থেকে বিমূর্ত"** নীতি কাজে লাগানো যায়।

London Mathematical Association শিক্ষার ঐতিহাসিক ধারার সঙ্গে সামঞ্জস্য করে জ্যামিতি শিক্ষণে তিনটি স্তরের উল্লেখ করেন। জ্যামিতি শিক্ষাকে সার্থক করতে হলে জ্ঞানের বিকাশের ধারা অনুযায়ী শিক্ষার্থীর কাছে, বিষয়বস্তু উপস্থাপন করা প্রয়োজন। এই প্রসঙ্গে Herbert Spencer বলেন The education of the child must accord, both in mode and arrangement, with the education of mankind considered historically." অর্থাৎ শিশুর শিক্ষার ধারা ও ব্যবস্থা ঠিক সেইভাবে হবে, যেভাবে ইতিহাসে দেখা যায় মানবজাতি ক্রমে ক্রমে তার শিক্ষালাভ করেছে। তাই ইতিহাসের উদ্ভব অনুসারে শিক্ষার্থী আগে হাতে কলমে নানা-রকম পরীক্ষা ও পরিমাপের ভেতর দিয়ে অগ্রসর হয়ে পরে ধীরে ধীরে বিমূর্তভাবে বিষয়টি শিখলে জ্যামিতি শিক্ষা হবে স্বাভাবিক। এ ব্যাপারে

জ্যামিতি শিক্ষণে স্বজ্ঞা, আরোহীমূলক যুক্তি, পর্য্যবেক্ষণ, পরীক্ষার স্থান

দুটী মানসিক পদ্ধতি বিশেষ কাজ করে : (১) **স্বজ্ঞা** (Intuition) (২) **আরোহী পদ্ধতিতে সিদ্ধান্ত গ্রহণ** (Induction); বস্তুতঃ **যে কোন প্রত্যক্ষের** (Observation) **মধ্যেই স্বজ্ঞা কাজ করে।**

স্বজ্ঞা দ্বারাই মানুষ সরাসরি প্রত্যক্ষজাত জ্ঞান সঞ্চয় করে। যেমন : কোন ত্রিভুজের দুইবাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর : প্রত্যক্ষ ও স্বজ্ঞার মাধ্যমেই এটিকে উপলব্ধি করা যায়। তাছাড়া অবরোহমূলক যুক্তিপ্রণালী সুরুই হয় স্বজ্ঞামূলক স্বীকার্যা বা স্বতঃসিদ্ধের সাহায্যে। শুধুশুধু নিয়মমাফিক প্রমাণের বোঝা চাপিয়ে শিক্ষার্থীর মনকে ভারাক্রান্ত করা উচিত নয়। Plato উপলব্ধি করেছেন "God eternally geometrises"। যেমন : আনারসের গায়ে বহুভুজ আকৃতি, তেঁতুল, ফার্ণ প্রভৃতির সমান্তরাল পাতা, গোলাকার সূর্য, চন্দ্র প্রভৃতির অন্তর্নিহিত জ্যামিতিক সত্যগুলি স্বজ্ঞার দ্বারাই সহজে উপলব্ধি করা যায়।

যেখানে স্বজ্ঞা সরাসরি কাজ করে না সেখানে আরোহী পদ্ধতির সাহায্যে কিছু কিছু পরীক্ষা নিরীক্ষার মাধ্যমে বার বার প্রত্যক্ষ করলে অন্তর্নিহিত ধারণাটী সহজেই বোঝা বা বোঝানো যায়।

অনেকগুলি দৃষ্টান্ত, পর্যাবেক্ষণ ও পরীক্ষার দ্বারা সিদ্ধান্ত গ্রহণ করা উচিত। জ্যামিতি সৃষ্টিতেও এই পথ অবলম্বন করা হয়েছিল। জ্যামিতি শিক্ষণেও এই ঐতিহাসিক ধারা অনুসরণ করাই ভাল। বর্তমানে তিনটি স্তরের মাধ্যমে জ্যামিতি শিক্ষা দেওয়া হয় : (১) **পরীক্ষামূলক স্তর** (Experimental Stage) (২) **অবরোহী স্তর** (Deductive Stage) (৩) **নিয়মানুগ স্তর** (Systematising Stage)। **ঐতিহাসিক ধারায় অবশ্য এগুলি দুটী ধারায় বিভক্ত** : যেমন ; (১) **স্বজ্ঞা মূলক** (Intuitive) এবং (২) **আরোহী** (Inductive)।

(১) **পরীক্ষামূলক স্তর** (Experimental Stage) :

এই স্তরে শিক্ষার্থী আগ্রহ সহকারে হাতে-কলমে কাজের মাধ্যমে, পরীক্ষা-নিরীক্ষার দ্বারা বিভিন্ন জ্যামিতিক আকার ও তাদের সম্পর্কে ধারণা লাভ করবে।

এখানে যে যে বিষয়গুলি বিশেষ বিবেচ্য, সেগুলি হ'ল (১) বাস্তব জীবনে জ্যামিতির প্রয়োজনীয়তা দেখানো (২) জ্যামিতির ইতিহাস আলোচনার মাধ্যমে শিক্ষার্থীর মধ্যে আগ্রহ সঞ্চার করা (৩) চার পাশের পরিবেশ থেকে ঘন-বস্তুর প্রত্যক্ষ থেকে বিভিন্ন আকার সম্পর্কে ধারণা দান করা (৪) মূর্ত বস্তুর সাহায্যে বিমূর্ত ধারণা লাভে সহায়তা করা (৫) পর্যাবেক্ষণ ও পরীক্ষার দ্বারা অনুমান করতে

শেখানো ; (৬) সহজ ও সরল যন্ত্রপাতির দ্বারা দৈনন্দিন বাস্তব অভিজ্ঞতা ও হাতে-কলমে কাজের মাধ্যমে জ্যামিতি শেখানো (৭) অঙ্কন, পর্য্যবেক্ষণ ও পরিমাপের মাধ্যমে বিন্দু, রেখা, কোণ, লম্ব, সমান্তরালরেখা, ত্রিভু'জ, বহুভুজ, বৃত্ত, ক্ষেত্রফল, ঘনফল, অনুপাত, সমদ্বিখণ্ডন, সাদৃশ্য, প্রতিসাম্য, ও সর্বসমতা সম্পর্কে ধারণা দান করা (৮) বিভিন্ন পরিমাপের কোণও তৎসংক্রান্ত নানাবিধ তথ্য ও সত্যের সন্ধান দান করা এবং (৯) প্রকৃতি, শিল্প ও বাণিজ্যে জ্যামিতির মূল্য নির্ধারণ করা।

এই স্তরটী প্রধানতঃ স্বজ্ঞা ও পরীক্ষানিরীক্ষার ওপরই নির্ভরশীল।

(২) **অবরোহী স্তর** (Deductive Stage) :

এই স্তরে শিক্ষার্থী উপপাদ্য ও নতুন সমস্যার (Riders) প্রমাণ করতে ও লিখতে শেখে এবং পূর্বস্তরে স্বজ্ঞা ও পরীক্ষা-নিরীক্ষার মাধ্যমে অর্জিত জ্যামিতিক উপপাদ্যের ধারণাগুলি এবং তাদের অবলম্বনে যে সমস্ত উপপাদ্য এই স্তরের উপযুক্ত বলে বিবেচিত হবে, তাদের অবরোহী যুক্তির সাহায্যে প্রমাণ করতে শেখে। তবে প্রমাণগুলো তখনও সম্পূর্ণ **নিয়মানুগ** বা Systematised হয় না। অবশ্য প্রমাণগুলির মধ্যে নিয়মের কঠোরতা খুব বেশী রাখা হয় না। কোন একটি উপপাদ্যকে কেন্দ্র ক'রে কয়েকটি উপপাদ্য যুক্তি প্রয়োগ ক'রে আবিষ্কার করা হয়। অনুসিদ্ধান্ত গ্রহণ করার দক্ষতাও এই স্তরে সৃষ্টি হয়। ত্রিভুজের বাহু ও কোণ সংক্রান্ত কতকগুলো উপপাদ্য এই স্তরে শেখানো যেতে পারে। সমস্ত কাজের মধ্যে আগ্রহ বজায় রাখার জন্য কিছু পরীক্ষা-নিরীক্ষারও সুযোগ রাখা উচিত। তাহলেই এই স্তর প্রথম ও তৃতীয় স্তরের সংযোজক স্তর হিসাবে যোগ্যতা অর্জন করতে পারবে। আমাদের মনে রাখতে হবে যে, কোন স্তরই বিচ্ছিন্ন নয়। **প্রথম ও দ্বিতীয় স্তরের জ্ঞান ও দক্ষতা সম্মিলিত বা ক্রমযৌগিকভাবে** (Cummulatively) **তৃতীয় স্তরে কার্যকরী হবে**।

(৩) **নিয়মানুগ স্তর** (Systematising Stage) :

পূর্বের দুটী স্তরের সামতলিক জ্যামিতির অর্জিত জ্ঞানকে নিয়মানুগ করা এবং উপপাদ্যগুলকে স্বল্পসংখ্যক স্বতঃসিদ্ধের ওপর নির্ভর ক'রে যুক্তিসিদ্ধ অবরোহী প্রমাণ শেখানোই হ'ল এই স্তরের মুখ্য উদ্দেশ্য। যুক্তিগুলি অবশ্যই শিক্ষার্থীর মানসিক বয়স ও পূর্বজ্ঞানের ভিত্তিতে গড়ে উঠবে। এই স্তরের উপপাদ্যগুলিকেও বিভিন্ন গোষ্ঠী বা দলে ভাগ করা হয়। বিভিন্ন গোষ্ঠী বা দলের মূল উপপাদ্যের সাহায্যে ধারাবাহিক-ভাবে অন্যান্য উপপাদ্যগুলিকে নিয়মানুগ অবরোহী পদ্ধতিতে প্রমান করতে ও লিখতে

শিক্ষার্থীদের শেখাতে হবে। এই স্তরে বিশ্লেষণ পদ্ধতিতে চিন্তা ও অনুশীলন করার অভ্যাসও সৃষ্টি করতে হবে। সদর্থক, নঙর্থক বাক্য ও উক্তির ব্যবহার, বিপরীত প্রতিজ্ঞা প্রমাণের যুক্তি প্রভৃতিও এই স্তরে বিবেচনা করা উচিত। নিয়মানুগ প্রমাণের চারটে অংশ :

(১) **প্রকল্প বা প্রদত্ত তথ্য** (Hypothesis) : চিত্রের সাহায্যে প্রদত্ত তথ্যের সারাংশ জ্যামিতিক ভাষায় এই অংশে দেওয়া হয়।

(২) **সিদ্ধান্ত** (Conclusion) : যা প্রমাণ করতে হবে।

(৩) **অঙ্কন** (Construction) : প্রকল্প অনুযায়ী এবং প্রমাণের উদ্দেশ্যে অতিরিক্ত চিত্র অঙ্কন।

(৪) **প্রমাণ** (Proof) : যুক্তিসম্মত অনুসিদ্ধান্ত গ্রহণ ও বিবৃত সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া। **অনেকে উপরের স্তরগুলিকে দুটী ভাগে ভাগ করেছেন : (ক) সমস্যার বর্ণনা** এবং (খ) **সমাধান পদ্ধতি।**

এই স্তরের মূল উদ্দেশ্য হ'ল আবিষ্কারের বদলে তথ্যসমূহের প্রমাণ ও যুক্তির অবতারণা।

রূপান্তরীকরণ জ্যামিতি শিক্ষণের কয়েকটী ধারণা : (Some Basic Concepts in Transformation Geometry) :

গতানুগতিক জ্যামিতিশিক্ষণে যুক্তিগ্রাহ্য ইউক্লিড পদ্ধতিই প্রচলিত ছিল। বিষয়বস্তু বা উপাদান সংগ্রহের ক্ষেত্রেও বিমূর্ত যুক্তিপূর্ণ প্রমাণভিত্তিক বিষয়বস্তু বা উপাদান-এর ওপরেই জোর দেওয়া হ'ত, সে অনিবার্য্য হোক বা না হোক। তাছাড়া ত্রিভুজের সর্বসমতার কঠোর ও নিয়মমাফিক ধারণার ওপরই বেশী গুরুত্ব দেওয়া হ'ত। এতে শিক্ষার্থীদের মধ্যে জ্যামিতি সম্পর্কে নতুন ধারণা সৃষ্টিকে করত সীমিত ও ব্যাহত। সেইজন্য Klein-এর মতে "Geometry should concern also with the study of those properties of figures which are left invarient under all 'mappings' of a group". জ্যামিতি অর্থাৎ সেই সব চিত্রের ধর্মসম্পর্কে আলোচনা করে যা একটী দল বা গোষ্ঠীর সমস্তরকমের চিত্রের ক্ষেত্রেই অপরিবর্তনীয়। এইভাবে গড়ে ওঠে একটী বিশেষধরণের জ্যামিতি। সেইজন্যই শিক্ষার্থীদের কাছে রূপান্তরীকরণ জ্যামিতি বা Transformation Geometry-র ধারণা তুলে ধরা বিশেষ প্রয়োজন। এর ফলে শিক্ষার্থীরা ইউক্লিড জ্যামিতির সীমানার বাইরে বিভিন্ন ধরণের জটিল সমস্যা-সমাধানের শক্তি অর্জন করবে। তার জন্যই জ্যামিতির নতুন

Transformation Geometry-র প্রয়োজনীয়তা

পাঠক্রমে বিদ্যালয় স্তরে কয়েকটী বিশেষধরণের বিষয় অন্তর্ভুক্তির প্রস্তাব এসেছে। সেগুলি হ'ল **প্রতিফলন** (Reflection), **অবস্থানান্তরিতকরণ** (Translation), **ঘূর্ণণ** (Rotation), **প্রতিসাম্য** (Symmetry),**প্রসারণ** (Enlargement) প্রভৃতির ধারণা। উপযুক্ত উদাহরণ ও উপকরণের সহায়তায় এই ধারণায় শিক্ষার্থীদের দক্ষতা অর্জন ও জ্যামিতিক সমস্যার সমাধানে সাহায্য করা বিশেষ প্রয়োজন।

বিন্দু, রেখা, তল, ছিন্নাংশ ও রশ্মি (Points, Lines, Planes, Segments, Rays) **:**

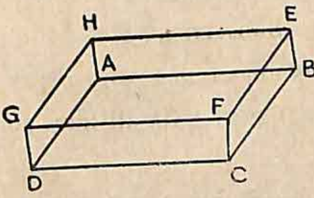
বিন্দু, রেখা, তল প্রভৃতি বস্তুগুলির সংজ্ঞা দিতে গিয়ে এমন কতকগুলি শব্দের ব্যবহার করতে হয়, যেগুলির সংজ্ঞা নির্ণয় করতে গেলে, আবার ফিরে ঐ সব জ্যামিতিক বস্তুতেই আসতে হয়। এই অসঙ্গতির জন্যই এদের কোন সংজ্ঞা দেওয়া উচিত নয়। এগুলোকে 'Undefined Terms' হিসাবেই ধরে নেওয়া উচিত।

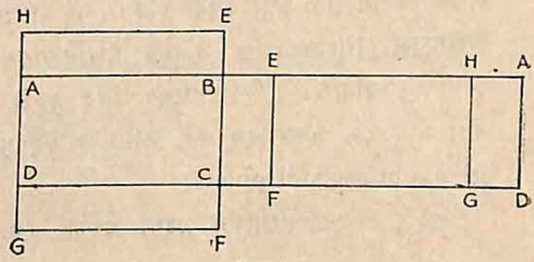
জ্যামিতিকে পার্থিব জগতের মডেল হিসাবেই দেখা উচিত। পারিপার্শ্বিক পার্থিব বস্তু থেকেই জ্যামিতিক বস্তুর ধারণায় আসাই যুক্তি সংগত। এইভাবেই আমরা ক্রমশঃ বিমূর্ততার দিকে অগ্রসর হতে পারি। যেমন : বিন্দুকে একটি ক্ষুদ্র আকারের ফুট্‌কির (Dot) বিমূর্ত রূপ হিসাবে কল্পনা করতে পারি। তেমনি একটি রেখাকে একটা টান করা অসীম পর্যান্ত বিস্তৃত তারের বিমূর্তরূপ বা একটি তলকে টেবিলের উপরিভাগ বা অসীম পর্যান্ত বিস্তৃত ঘরের দেওয়ালের বিমূর্তরূপ হিসাবে চিন্তা করতে পারি। কাগজ ভাঁজ করা, বিন্দু স্থাপন প্রভৃতি ব্যবহারিক পদ্ধতির মাধ্যমে শিক্ষার্থীদের কাছে Undefined Terms-গুলির উপস্থাপন এবং তৎসম্পর্কিত বিভিন্ন ধারণার মধ্যে সম্বন্ধ স্থাপন করা বিশেষ প্রয়োজন। যেমন : (১) একটি বিন্দুগামী ইচ্ছেমত বহুসংখ্যক রেখা টানা যেতে পারে, (২) দুটি বিন্দু দিয়ে একটি ও কেবলমাত্র একটি রেখাই টানা যায়, (৩) তিন বা ততোধিক বিন্দু সমরেখা হতেও পারে বা নাও হতে পারে ; (৪) কোন সমতলে দুটি রেখা পরস্পর ছেদ করতেও পারে বা নাও করতে পারে ; যখন রেখা দুটি ঐ সমতলে পরস্পর ছেদ করে না, তখন রেখা দুটিকে সমান্তরাল রেখা বলি, (৫) তিন বা ততোধিক রেখা সমবিন্দু নাও হতে পারে বা সমবিন্দু হ'তেও পারে, (৬) কোন একটি রেখা কোন সমতলকে একটি বিন্দুতে ছেদ করতেও পারে বা ছেদ নাও করতে পারে, (৭) একটি রেখার দুটি বিন্দু যে সমতলে অবস্থিত, রেখাটিও সমগ্ররূপে সেই সমতলে অবস্থান করে, (৮) দুটী সমতল একটি রেখায় ছেদ করতে পারে বা নাও পারে।

আয়তঘন, ঘনক ও চতুস্তলকের ধারণা ঃ

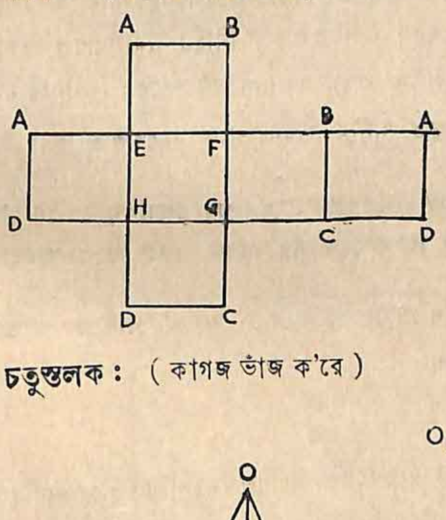
আয়তঘন, ঘনক ও চতুস্তলকের ধারণা শিক্ষার্থীরা আগে থেকেই জানে। তাদের ধারণাকে সুদৃঢ় করার জন্য এগুলো মডেলের মাধ্যমে উপস্থাপন করা বাঞ্ছনীয়। এখানেও আমরা কাগজ ভাঁজ ক'রে প্রয়োজনবোধে আঠা লাগিয়ে মডেল তৈরীর কাজকে সহজ করতে পারি।

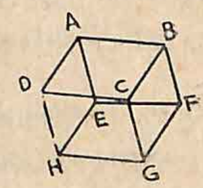
আয়তঘন ঃ (কাগজ ভাঁজ ক'রে)



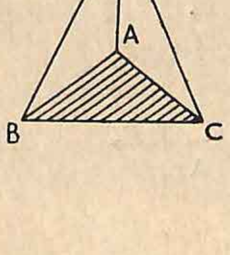


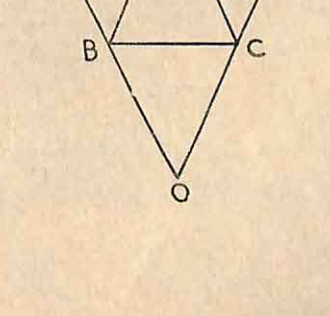
ঘনক ঃ (কাগজ ভাঁজ ক'রে)





চতুস্তলক ঃ (কাগজ ভাঁজ ক'রে)





এভাবে ঘনপদার্থের মডেল থেকে তল, কিনারা, শীর্ষ প্রভৃতির ধারণা ও পারস্পরিক সম্পর্ক স্থাপন সহজেই করতে পারি।

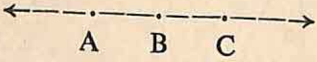
রেখাংশ : (Segment of a line)

গতানুগতিক গণিতে আমরা স্বতঃসিদ্ধকেই মূল হিসাবে গ্রহণ ও ব্যবহার করেছি। স্থান ও কালের জ্যামিতি আলোচনার সময় আমরা **কাল** (Space)-কে একটি বিন্যাস বা S রূপে কল্পনা করি। ঐ কালের অন্তর্গত বিন্দুগুলি হ'ল বিন্যাসের **উপাদান** (Element)। S এর **উপবিন্যাসের** (Subsets) একত্রীকরণই হ'ল রেখা ; তেমনি S এর উপবিন্যাসের আর একটী একত্রীকরণ হবে তল। এভাবে বলা যায় যে, সমস্ত বিন্দু এবং তল হ'ল বিন্দুসমূহের বিন্যাস অর্থাৎ all lines and planes are sets of points.

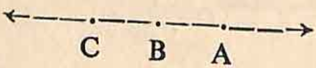
দুইটী বিন্দুর সংযোজক রেখা একটী এবং বিন্দুদুটী যদি P ও Q হয় তাহলে রেখাটীকে লেখা হয় $\overleftrightarrow{PQ}$—এইভাবে। PQ এর মাথায় তীর চিহ্নের মাধ্যমে রেখার উভয়দিকে অসীম বিস্তৃতি নির্দেশ করে। রেখাংশ হ'ল নির্দিষ্ট সীমাসমন্বিত রেখার কিছু অংশ। PQ রেখাংশকে নির্দেশিত করা হয় $\overline{PQ}$-এই ভাবে। আবার যদি PQ রেখায় P নির্দিষ্ট কিন্তু Q এর বিস্তৃত অসীম তখন তাকে নির্দেশিত করা হয় $\overrightarrow{PQ}$ এবং একেই বলা হয় রশ্মি বা Ray। এখানে $\overrightarrow{PQ}$ রশ্মির শেষবিন্দু বা শীর্ষ হ'ল P। আবার যদি তিনটি বিন্দু P, Q, R সমরেখ নয় অথচ একই তলে অবস্থান করে তখন তলটিকে নির্দেশিত করা হয় $\overleftrightarrow{PQR}$ এইভাবে ; অর্থাৎ তলটিকে প্রতিটি দিকেই অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত করা সম্ভব।

অন্তবর্তীতা (Betweenness) :

যদি একটি রেখা L-র ওপর A, B এবং C তিনটী বিন্দু নিম্নলিখিতভাবে অবস্থিত হয় ; যেমন :



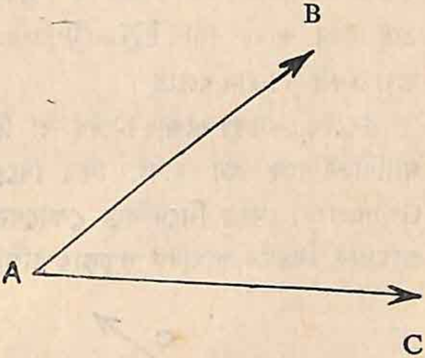
বা



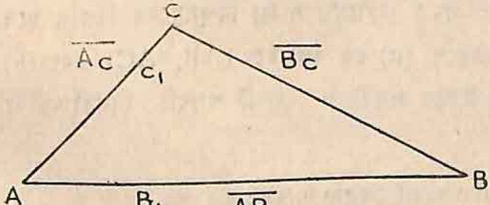
তখন আমরা বলি, B হ'ল A এবং C-র মধ্যবর্তী। এইরূপে যদি A, B, C তিনটী সমরেখ বিন্দু পাই তখন AB+BC=AC হয় এবং B হবে A ও C-এর মধ্যবর্তী। তাকে চিহ্নিত করি A – B – C এইভাবে। সুতরাং A – B – C হলে C – B – A হবে এবং একই রেখার ওপর A, B, C তিনটী পৃথক বিন্দু হিসাবে অবস্থান করবে। এভাবে একই রেখার A, B, C, D বিন্দু চারটে পর পর অবস্থান করলে A – B – C – D হবে।

কোণ এবং ত্রিভুজ :

একই শেষবিন্দু বা শীর্ষবিন্দু সমন্বিত দুইটী রশ্মির দ্বারা গঠিত হয় একটী কোণ যেমন : তাহলে একই রেখার ওপর অবস্থিত নয় অথচ একই শীর্ষবিন্দু সমন্বিত দুটী রশ্মির সংযোজনের চিত্রটীই হ'ল কোণ। যদি AB এবং AC-র সংযোগে একটী কোণ গঠিত হয় তাহলে এই রশ্মিগুলি হ'ল কোণের বাহু এবং A বিন্দুটী হ'ল শীর্ষবিন্দু। কোণের প্রতীক হ'ল ∠CAB বা ∠BAC।



সমরেখ নয় এমন তিন বিন্দুর সংযোজক ক্ষেত্রই হ'ল ত্রিভুজ; অর্থাৎ A, B এবং C যদি তিনটী বিন্দু একই রেখার ওপর অবস্থিত না হয় তখন বিন্যাস $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC}$ কেই আমরা ত্রিভুজ বলব।



তিনটী রেখাংশ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ এবং $\overline{AC}$ হ'ল ত্রিভুজের বাহু এবং A, B এবং C হ'ল ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু আর ত্রিভুজ-টির প্রতীক হ'ল △ABC।

উপরোক্ত ধারণা থেকে নিম্নসিদ্ধান্তে আসা যেতে পারে :

(1) A, B যদি দুটী যে কোন বিন্দু হয় তাহলে, $\overline{AB} = \overline{BA}$

(2) $\overrightarrow{AB}$ রশ্মির ওপর C যদি একটী বিন্দু হয় তাহলে, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$

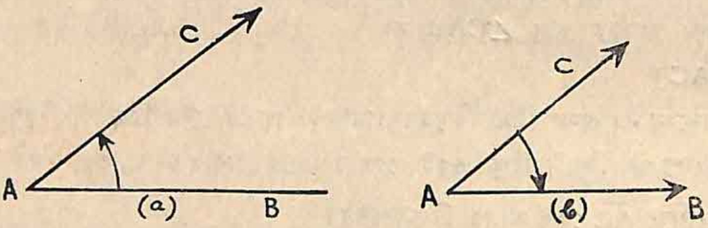
(3) $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AC}$-র উপর A ছাড়া যথাক্রমে B_1 এবং C_1 বিন্দুদুটী যদি অবস্থিত হয়, তাহলে, $\angle BAC = \angle B_1AC_1$।

(4) $\overline{AB} = \overline{CD}$ হলে A, B এর সঙ্গে যে সম্পর্ক, C, D-র সঙ্গেও সেই সম্পর্ক হবে।

(5) $\triangle ABC = \triangle DEF$ হলে, A, B, C-র সঙ্গে যে সম্পর্ক D, E, F-এর সঙ্গেও সেই সম্পর্ক হবে।

আমাদের মনে রাখতে হবে যে '=' প্রতীকটী কেবলমাত্র একটী সর্তে ব্যবহৃত হবে অর্থাৎ "is exactly the same as" অর্থেই '=' প্রতীকটী ব্যবহার করতে হবে। তাই যখন আমরা লিখি $\overline{PQ} = \overline{QP}$, তখন বুঝতে হবে $\overline{PQ}$ এবং $\overline{QP}$ বিন্যাস দুটীর মধ্যে একই উপাদান রয়েছে।

উপরের কোণের সংজ্ঞায় নির্দেশ বা চিহ্নের ধারণা দেওয়া হয়নি। ইউক্লিড জ্যামিতির পক্ষে এটী যথেষ্ট, কিন্তু **বিশ্লেষণাত্মক জ্যামিতির** (Analytical Geometry) ক্ষেত্রে **নির্দেশিত কোণের** (Directed angles) ধারণার বিশেষ প্রয়োজন, যেখানে প্রাথমিক ও চূড়ান্ত রশ্মির মধ্যে পার্থক্য থাকবে। যেমন :



উপরের দৃষ্টান্তের পরিপ্রেক্ষিতে প্রদত্ত কোণের সংজ্ঞা বিন্দুসমূহের বিন্যাস হবে না, বরং হবে ordered pair। এরূপে (*a*) কে বলা হবে (AB, AC) এবং (*b*) কে বলা হবে (AC, AB) এবং উভয়ে অসমান। একটি অপরটির বিপরীতগামী বা চিহ্নিত।

রেখাংশের সর্বসমতা (Congruence of Segments) :

দুটি চিত্র তখনই সর্বসম হবে যখন একটী অপরটীর সঙ্গে মিলে যাবে। তাই একই মানের দুটি বর্গ সর্বদাই সর্বসম। অনুরূপে একই ব্যাসার্দ্ধ বিশিষ্ট দুটি বৃত্ত বা একই মাপের দুটী সমবাহু ত্রিভুজ সর্বদাই সর্বসম। তেমনি একই দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট দুটী রেখাংশও সর্বসম। তাই বলা হয়, $AB = CD$ হলে $\overline{AB}$ এবং $\overline{CD}$ সর্বসম।

লেখা হয় : $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

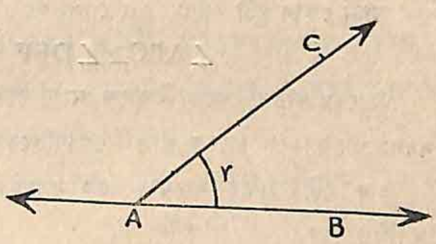
এভাবে লেখা যায় যে, যদি $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ হয়, $\overline{CD} \cong \overline{AB}$ হবে ; যদি $\overline{AB} \cong$ CD এবং CD$\cong$EF হয়, AB$\cong$EF হবে।

কোণের সর্বসমতা (Congruence of Angles)

$\angle ABC$ কোণের পরিমাপকে নির্দেশিত করার কার্য্যকরী চিহ্ন (Functional Notation) হ'ল $m\angle ABC$।

উক্ত সংজ্ঞার ভিত্তিতে আমরা পাই :

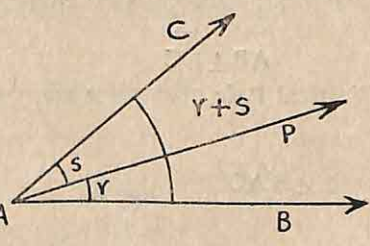
(১) অর্ধসমতলে H-এর একটী ধারের রশ্মি $\overrightarrow{AB}$ হলে, O থেকে 180°-র মধ্যে প্রতি r সংখ্যার জন্য $\overrightarrow{AC}$ হবে একটীমাত্র রশ্মি যখন H এর ওপর C অবস্থিত হবে। তখন সর্ত হবে,



$$m\angle CAB = r$$

(২) $\angle BAC$ কোণের P যদি অন্তর্গত হয় তাহ'লে

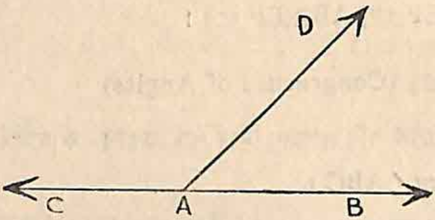
$$m\angle BAC = m\angle BAP + m\angle PAC \text{ হবে}$$



(৩) যদি দুটী বিপরীত রশ্মির একই শীর্ষবিন্দু হয় এবং তৃতীয় রশ্মিটীরও যদি ঐ শীর্ষবিন্দু থাকে তাহলে দুটি কোণ উৎপন্ন হয় এবং তাদের বলা হয় Linear Pair।

এখানে $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ বিপরীত রশ্মি, $\overrightarrow{AD}$ তৃতীয় রশ্মির সঙ্গে মিলিত হয়ে দুটি কোণ উৎপন্ন করেছে। তখন $\angle DAB$ এবং $\angle DAC$ হ'ল Linear Pair।

এখানে $m\angle BAD + m\angle DAC = 180^\circ$ এবং দুটি কোণ পরস্পর পরস্পরের পুরক কোণ।



(4) কোণের সর্বসমতা তাদের পরিমাপের পরিপ্রেক্ষিতে বিচার করা হয়। যেমন: যদি $m\angle ABC = m\angle DEF$ হয়,

তখন কোণ দুটী সর্বসম এবং লেখা হয়

$$\angle ABC \cong \angle DEF$$

উপরের ধারণা থেকে সিদ্ধান্তে আসা যায় যে, যদি Linear Pair-এর কোণগুলি সর্বসম হয় তাহলে তাদের প্রতিটি কোণ হবে সমকোণ।

যদি দুটী রশ্মির সংযোগ এক সমকোণ হয় তাহলে দুটী রশ্মি পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত হবে।

যেমন: $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AC}$ রশ্মিদ্বয় লম্বভাবে অবস্থিত হলে লেখা যায়;

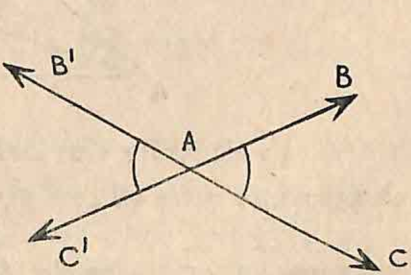
$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$$

তেমনি $\overleftarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AC}$ পরস্পর লম্ব হলে লেখা যায়,

$$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AC}$$

(5) দুটী কোণ Vertical Pair গঠিত করবে যদি তাদের বাহুগুলি বিপরীত রশ্মি হিসাবে থাকে। যেমন:

এখানে $\angle BAC$ এবং $\angle B'AC'$ হল Vertical Pair।



এভাবে আমরা ত্রিভুজের সর্বসমতা, বৃত্তের সর্বসমতা প্রভৃতির বিচার করতে পারি। যে কোন সত্য প্রমাণ বা প্রতিষ্ঠা করতে গেলেই সর্বসমতার ধারণা এসে পড়ে। "বস্তু পরস্পরের সঙ্গে মিলিত হলেই সর্বসম হবে"—

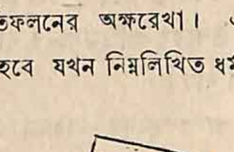
এই ধারণার ওপর ভিত্তি করেই গড়ে উঠেছে ইউক্লিডের সর্বসমতার প্রত্যয়গুলি ; যেগুলি সত্যই যুক্তিভিত্তিক। তাঁর মতে কোনরূপ বিকৃতি না ঘটিয়েই একটী চিত্রকে আর একটি চিত্রের ওপর স্থাপন করা যায়। এটাই হ'ল ইউক্লিডের সর্বসমতা প্রমাণের মূল প্রত্যয়। **এ থেকেই গড়ে উঠেছে রূপান্তরীকরণ জ্যামিতির** (Transformation Geometry) **ধারণা**। ইউক্লিড জ্যামিতিকে বোঝবার জন্য রূপান্তরীকরণ জ্যামিতির প্রাথমিক ধারণা বিদ্যালয় স্তরে অন্তর্ভুক্ত করা বিশেষ প্রয়োজন। তাছাড়া শিক্ষার্থীরা এর মাধ্যমে জ্যামিতির উন্নত পর্যায়ের আধুনিক কৌশলকে মূল্যায়ন করতে পারবে।

প্রতিফলন (Reflection)

রূপান্তরাকরণ জ্যামিতি উপস্থাপনের একটী মাধ্যম হল প্রতিফলন। শিক্ষার্থীরা আয়নার ব্যবহার করে বা জানে। আয়নার ভেতর দিয়ে অনুরূপ একটি প্রতিবিম্ব দেখা যায় সে সম্পর্কে শিক্ষার্থীরা ওয়াকিবহাল।

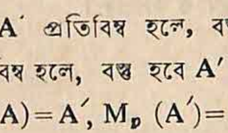
একটী সমতলে P একটী সরলরেখা কল্পনা করা হ'ল, সমতলের ওপর P রেখা বরাবর একটি আয়না এমনভাবে স্থাপন করা হ'ল যেন আয়নাটি সমতলের সঙ্গে লম্বভাবে থাকে। সমতলে অবস্থিত প্রত্যেক বিন্দুর অনুরূপ একটি করে নির্দিষ্ট বিন্দু আয়নার মধ্য দিয়া দেখা যাবে। যাকে আমরা বলি প্রতিবিম্ব এবং মৌলিক বিন্দুটি হ'ল বস্তু বা Object। একেই আমরা সমতলের উপরিস্থিত p রেখার প্রতিফলনের চিত্র বা M_p বলি ; যেখানে p হল প্রতিফলনের অক্ষরেখা। একটি রেখার ওপরের প্রতিফলনকেই রূপান্তরীকরণ বলা হবে যখন নিম্নলিখিত ধর্মগুলি সেখানে বর্তমান থাকবে।

(১) p রেখার একমাত্র প্রতিফলন হবে M_p।



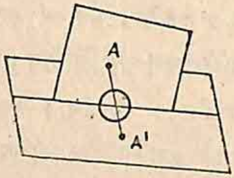
(১)

A´ প্রতিবিম্ব হলে, বস্তু হবে A, আবার A প্রতিবিম্ব হলে, বস্তু হবে A'। তখন লেখা হয়, $M_p(A) = A'$, $M_p(A') = A$ এবং A ও A´ দুটী P-এর বিপরীত দিকে অবস্থিত হবে।

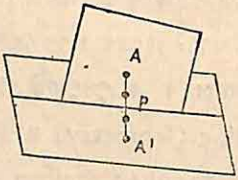
(২)


(২) চিত্রটির p-এর বিন্দুগুলি নির্দিষ্ট এবং p একটি নির্দিষ্ট রেখা। তাহ'লে AA'ও একটি নির্দিষ্ট রেখা হবে।

(৩) প্রতিফলন M_p-র দূরত্ব ও কোণগুলিও অপরিবর্তনীয়।



(৩)



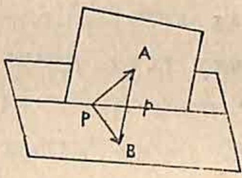
(৪)

(৪) p এবং AA′ পরস্পর লম্বরেখা। সুতরাং A ও A′-র সংযোজক রেখাংশ p-র উপর লম্ব এবং p-র দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হবে। সেক্ষেত্রেও একটি প্রতিফলন M_p হবে।

অর্থাৎ $M_p(A) = A'$ এবং $M_p(A') = A$

p অক্ষরেখা $\overline{AA'}$ রেখাংশের মধ্যস্থ (mediator) হবে।

(৫) যদি একটি বিন্দু P থেকে $\overrightarrow{PA}$ এবং $\overrightarrow{PB}$ দুটি রশ্মি একটি প্রতিফলন M_p এমনভাবে সৃষ্টি করে যে, $\overrightarrow{PB}$ হয় $\overrightarrow{PA}$-র প্রতিবিম্ব এবং অনুরূপে $\overrightarrow{PB}$-র প্রতিবিম্ব হবে $\overrightarrow{PA}$।



(৫)

তখন p হবে $\angle APB$-র সমদ্বিখণ্ডক।

উপরের প্রতিফলনের ধারণাগুলি কাগজ ভাঁজ করা পদ্ধতির মাধ্যমেও উপস্থাপন করা যায়।

প্রতিফলনের মাধ্যমে কোণের সর্বসমতা, ত্রিভুজের সর্বসমতা প্রভৃতির ধারণা দিলে শিক্ষার্থীদের কাছে জ্যামিতি শিক্ষণ হবে আকর্ষণীয় ও ফলপ্রদ।

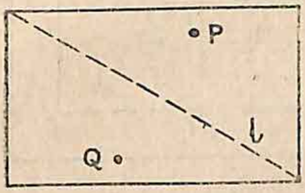
প্রতিসাম্য (Symmetry) :

কোন সামতলিক জ্যামিতিক চিত্রের ঐ একই সমতলে অবস্থিত কোন রেখা, চিত্রটীকে যখন এমন দুটি অংশ ভাগ করে যাতে, ঐচিত্রের দুটী অংশের যে কোন এক অংশ অপর অংশের সমান হয়, তখন সেই রেখাকে বলা হয় প্রতিসম রেখা এবং এই বিশেষ জ্যামিতিক ধর্মকে বলা হয় **প্রতিসাম্য**। এই ধর্মবিশিষ্ট জ্যামিতিক চিত্রকে **প্রতিসম চিত্র** বলে।

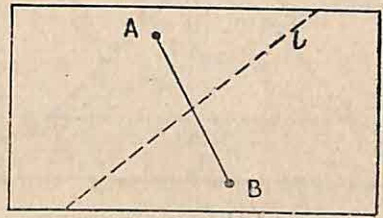
কাগজ ভাঁজ করা পদ্ধতির মাধ্যমে আমরা শিক্ষার্থীদের কাছে নিম্নলিখিত ধারণাগুলি প্রমাণ করতে পারি।

(১) দুটী বিন্দুর প্রতিসাম্য :

l = প্রতিসমরেখা, এখানে $l(P)=Q$ বা $l(Q)=P$



(১)



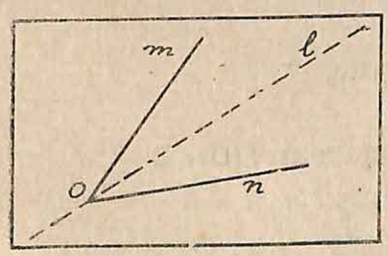
(২)

(২) রেখাংশের প্রতিসাম্য :

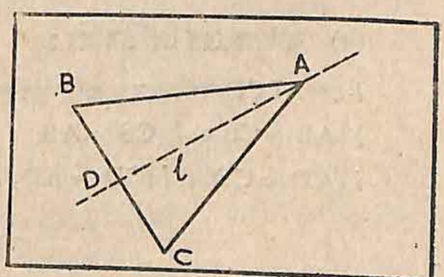
$l=AB$ রেখাংশের প্রতিসমরেখা, $l(A)=B$ বা $l(B)=A$, $l(AC)=BC$ বা $l(BC)=AC$ এবং $l(C)=C$।

(৩) কোণের প্রতিসাম্য :

l = কোণের প্রতিসম রেখা, $l(m)=n$ বা $l(n)=m$



(৩)



(৪)

(৪) সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের প্রতিসাম্য :

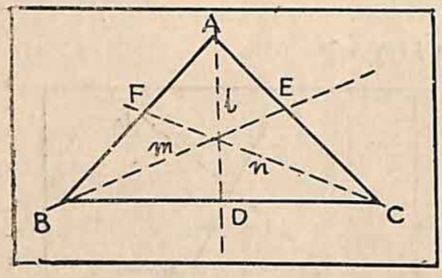
$l=ABC$ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের প্রতিসমরেখা, $l(AB)=AC$ বা $l(AC)=AB$ $l(B)=C$ বা $l(C)=B$ $l(BD)=CD$ বা $l(CD)=BD$ এবং $l(D)=D$

(৫) সমবাহু ত্রিভুজের প্রতিসাম্য :

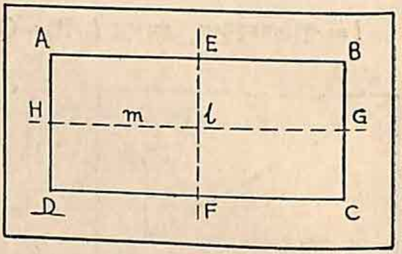
$l=ABC$ সমবাহু ত্রিভুজের একটি প্রতিসম রেখা, $l(AB)=AC$ বা $l(AC)$

=AB, l (B)=C বা l (C)=B, l (BD)=CD বা l (CD)=BD এবং l (D) =D।

এইভাবে m এবং n প্রতিসমরেখার ভিত্তিতেও প্রতিসাম্য নির্ণয় করা যায়।



(৫)



(৬)

(৬) আয়তক্ষেত্রের প্রতিসাম্য ঃ

l=ABCD আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য বরাবর প্রতিসমরেখা, l (AD)=BC বা l (BC)=AD, l (AE)=BE বা l (BE)=AE, l (DF)=CF বা l (CF)= DF এবং l (E)=E, l (F)=F

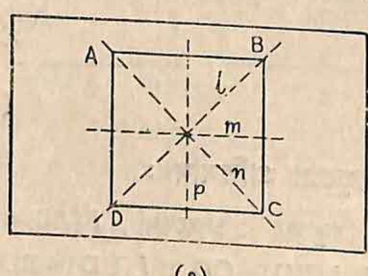
m প্রতিসমরেখা অনুযায়ীও আয়তক্ষেত্রের প্রতিসাম্য নির্ণয় করা যায়।

(৭) বর্গক্ষেত্রের প্রতিসাম্য ঃ

l-কে ABCD বর্গক্ষেত্রের প্রতিসমরেখা ধরলে,

l (AB)=CB বা l (CB)=AB,

l (AD)=CD বা l (CD)=AD, l (B)=B এবং l (D)=D

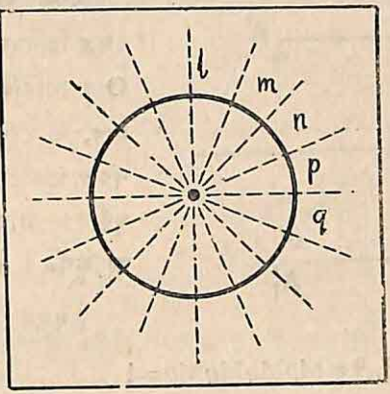


(৭)

এইভাবে m, n, p-কে ABCD বর্গক্ষেত্রের প্রতিসমরেখা ধরে প্রতিসাম্য নির্ণয় করা যেতে পারে।

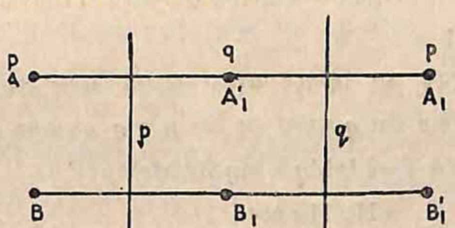
(৮) **বৃত্তের প্রতিসাম্য ঃ**

l, m, n, p, q রেখা বরাবর কাগজ ভাঁজ করে প্রতিসমরেখা অনুযায়ী প্রতিসাম্য নির্ণয় করা যেতে পারে।



অবস্থানান্তরিতকরণ (Translation) ঃ

p, q দুই সমান্তরাল অক্ষরেখায় পর পর দুটী প্রতিফলন হলে যে ধরণের চিত্রের সৃষ্টি হয় তাকেই বলা হয় **অবস্থানান্তরিতকরণ** Translation।



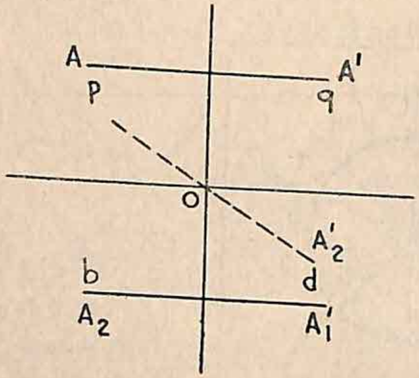
A-র চূড়ান্ত প্রতিবিম্ব A_1, p ও q-র উপর A থেকে অঙ্কিত লম্ব রেখার ওপর অবস্থিত এবং AA^1-র দূরত্ব p ও q-র দূরত্বের দ্বিগুণ। অনুরূপভাবে B বিন্দুর ক্ষেত্রেও একই অবস্থার সৃষ্টি হবে।

রূপান্তরীকরণের সমন্বয় (Combination of Transformations) :

যদি p-এর ওপর একটী প্রতিফলন g-কে g_1-তে এবং q-র ওপর g_1-কে g_{12}-তে চিত্রিত করে তাহলে g থেকে প্রাপ্ত প্রতিবিম্ব g_{12} হল সমন্বিত রূপান্তরীকরণ। এই ভাবে Mp এবং Mq যদি p ও q-র ওপর দুটী প্রতিফলনকে নির্দেশ করে, তাহলে A_{12} দুটী প্রতিফলনের পর A এবং তার চূড়ান্ত প্রতিবিম্বের সম্পর্ক হবে,

$$A_{12} = MqMp\,(A)$$

এখানে $MqMp$ হল এক নতুন রূপান্তর এবং এইভাবে রূপান্তরীকরণের সমন্বয় সম্ভব।



যখন Mp এবং Mq রূপান্তরের ক্ষেত্র বিনিময় করে, তখন $MpMq$, O-র চারিদিকে ঘূর্ণনের সঙ্গে সমান হবে, যেখানে p এবং q পরস্পরকে ছেদ করবে। এইরকম ঘূর্ণনের নাম Half Turn বা **অর্ধঘূর্ণন**। এক্ষেত্রে লেখা হয় H_o।

এখানে :

$$H_oH_o = H_o{}^2 = MpMqMqMp = 1$$

এই ধারণা এবং এইরকম রূপান্তরীকরণ জ্যামিতির অন্যান্য ধারণার ভিত্তিতে অনেক দ্বিমাত্রিক জ্যামিতির উপপাদ্য প্রমাণ করা যায়।

অর্ধঘূর্ণনের ফল হিসাবে অবস্থানান্তরিতকরণ (Translation as product of Half Turns) ঃ

দুটী প্রতিফলনের ফল হিসাবে আমরা আগেই অবস্থানান্তরিতকরণকে বিচার করেছি। তাই যদি p এবং q সমান্তরাল এবং p ও q-এর ওপর s, লম্ব হয় তাহলে দুটী প্রতিফলনের ফল $T = MpMq = MqMs\ MsMp$

$$= H_B\ H_A \text{ হবে।}$$

যেহেতু পরস্পর লম্বরেখার উপর দুটী প্রতিফলনের ফল তাদের ছেদবিন্দুর চারিদিকের অর্ধঘূর্ণন।

অবস্থানান্তরিতকরণের অনুসিদ্ধান্ত ঃ

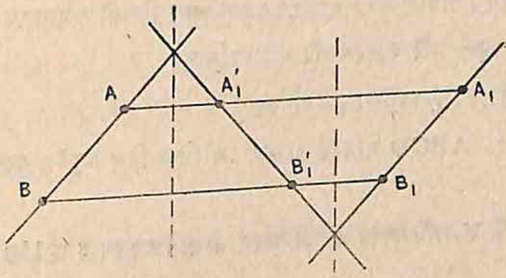
(1) V গতিসম্পন্ন একটী অবস্থানান্তরিতকরণ T-কে দুটী প্রতিফলনের ফল হিসাবে অসীম উপায়ে উপস্থাপন করা যায়, যেখানে দুই প্রতিফলণের অক্ষদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল, V-এর ওপর লম্ব এবং V-এর অর্ধদূরত্বে অবস্থিত।

যেহেতু অবস্থানান্তরিতকরণসমূহ হ'ল প্রতিফলনসমূহের ফল সেইজন্য তারা পরস্পর সমমানের এবং তাদের ধর্ম হ'ল ঃ

(ক) অবস্থানান্তরিতকরণগুলি এক-এক চিত্রবিশিষ্ট (one-one mappings)।

(খ) অবস্থানান্তরিতকরণগুলি হ'ল রেখার মধ্যে রূপান্তরীকরণ, যেখানে B রেখার প্রতিবিম্ব B^1 সর্বদাই সমান্তরাল [নীচের চিত্র অনুযায়ী]।

(গ) অবস্থানান্তরিতকরণগুলি সরাসরি সমমানের অর্থাৎ সর্বসম।



(2) তেমনি V গতিসম্পন্ন একটী অবস্থানান্তরিতকরণ T-এর বিপরীত রূপান্তরীকরণও একধরনের অবস্থানান্তরিতকরণ, যেখানে গতি $-V$। এখানে মান এক কিন্তু গতি বিপরীত।

(3) আবার V গতিসম্পন্ন একটী অবস্থানান্তরিতকরণ T-কে দুই অর্ধঘূর্ণনের ফল হিসাবে অসীম ও অসংখ্য উপায়ে উপস্থাপন করা হয়। A ও B অর্ধঘূর্ণণের কেন্দ্রবিন্দু এমনভাবে স্থাপন করতে হবে যাতে $AB=\frac{1}{2}V$ হয়। অবশ্য A ও B-র অবস্থান এখানে অনাবশ্যক বিষয়।

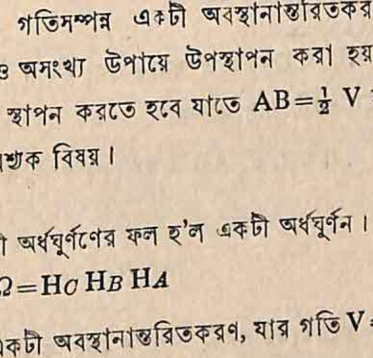
উদা. 1.

দেখাও যে, তিনটী অর্ধঘূর্ণণের ফল হ'ল একটী অর্ধঘূর্ণন।

মনে করি, $\Omega=H_C H_B H_A$

যেহেতু $H_B H_A$ একটী অবস্থানান্তরিতকরণ, যার গতি $V=2\overrightarrow{AB}$, যদি D একটী বিন্দু এমনভাবে নেওয়া হয়, যাতে $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$ হয়,

(নিচের চিত্র অনুযায়ী) তখন,



$\Omega=H_C(H_B H_A)=H_C(H_C H_D)=H_D$

= একটী অর্ধঘূর্ণন।

আবার :

$$H_A H_B H_C = H_A (H_A H_D) = \Omega$$

$$\therefore \; H_C H_B H_A = H_A H_B H_C$$

(২) এইভাবে প্রমাণ করা যায় যে চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুদ্বয় পরস্পর সমানও সমান্তরাল হলে চতুর্ভুজটী হবে একটী সামান্তরিক।

(৩) যদি $H_D H_C H_B H_A = 1$ হয়,

প্রমাণ কর : ABCD সামান্তরিকের কৌণিক বিন্দু-চতুষ্টয় হবে যথাক্রমে A, B, C ও D।

আমরা জানি V গতিসম্পন্ন একটী অবস্থানান্তরিতকরণ হ'ল $H_B H_A$ যেখানে, $\vec{AB} = \frac{1}{2}V$। অনুরূপে $H_D \; H_C$ আর একটি অবস্থানান্তরিতকরণ যার গতি V', যেখানে $\vec{CD} = \frac{1}{2}V'$।

যেহেতু $H_D H_C \; H_B H_1 = 1$,

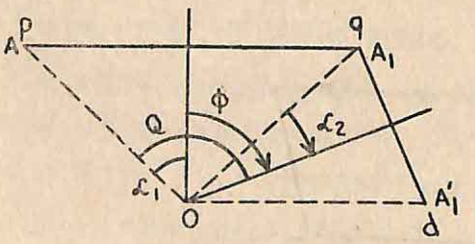
$\therefore \; V = V'$ অর্থাৎ $\vec{AB}$, $\vec{CD}$-র সঙ্গে সমান্তরাল, সমান কিন্তু $\vec{CD}$-র বিপরীত।

$\therefore$ ABCD একটী সামান্তরিক।

(৪) এইভাবে প্রমাণ করা যায়, F, AB-র মধ্যবিন্দু হবে, যদি $H_F H_B H_F H_A = 1$ হয়।

ঘূর্ণন (Rotations) :

দুটী প্রতিফলণের অক্ষরেখাদ্বয় একটী বিন্দুতে ছেদ করার ফল হিসাবে যে চিত্র প্রদান করে তার নামই হ'ল ঘূর্ণন বা Rotation।



পাশের চিত্রে M_p এবং M_q দুই প্রতিফলন, যাদের অক্ষদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করেছে। এখানে A-র প্রতিবিম্ব হ'ল A_1' এবং চিত্রটী O-এর চারিদিকে একটী ঘূর্ণনের সমান। Q ঘূর্ণনের কোণ 2ϕ এর সমান, যেখানে ϕ হল p এবং q অক্ষরেখার মধ্যবর্তী কোন।

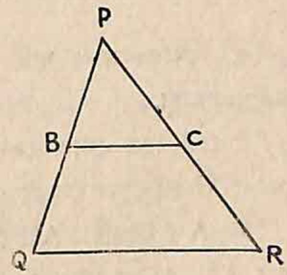
রূপান্তরীকরণ $R = M_q M_p$ এবং এটীকে বলা হয় Direct Isometrics।

অনুরূপ বিন্দুদ্বয় হবে A ও A'_1 যখন, $A'_1 = R(A)$ এবং $OA = OA'_1$ আর $\angle AOA'_1 = \theta = 2\phi$ হবে।

যখন কেন্দ্রবিন্দু এবং ঘূর্ণনের কোন নির্দিষ্ট থাকে, তখন ঘূর্ণন R হবে নিদিষ্ট। পরিমাণ ও ঘূর্ণনের গতিসহ ঘূর্ণনের কোনকে বলা হয় নির্দেশিত কোন বা directed angle এবং ঘূর্ণনের গতি ধনাত্মক হবে, যদি ঘূর্ণন ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে হয়।

উদা. (1).

দেখাও যে, একটী ত্রিভুজের দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও অর্ধ।



মনে করি, PQR একটি ত্রিভুজ, যেখানে PQ-এর মধ্যবিন্দু B এবং PR-এর মধ্যবিন্দু C।

$$\therefore \quad H_B H_Q H_B H_P = 1,$$
$$H_C H_R H_C H_P = 1$$
$$\therefore \quad H_Q = H_B H_P H_B,$$
$$H_R = H_C H_P H_C$$
$$\therefore \quad H_Q H_R = H_B H_P H_B H_C H_P H_C$$
$$= H_B H_C H_B H_P H_P H_C$$
$$= H_B H_C H_B H_C$$
$$= (H_B H_C)^2$$

$\therefore \quad \vec{QR} = 2\vec{BC}$ অর্থাৎ $BC \parallel QR$ এবং $BC = \frac{1}{2}QR$

(2) এইভাবে প্রমাণ করতে পারি যে, ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় সমবিন্দু।

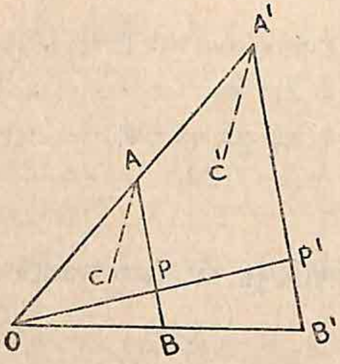
প্রসারণ (Enlargements) :

মনে করি একটি সমতলে O এক নির্দিষ্ট বিন্দু এবং r একটি শূন্য ব্যতীত কোন সংখ্যা (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক)। O-র মধ্য দিয়ে একই সরলরেখার ওপর A ও A' যদি দুই বিন্দু হয় তাহলে,

$$\frac{OA'}{OA} = r \text{ হবে,}$$

এবং তখন A-র প্রতিবিম্ব হবে A' এবং চিত্রটি হবে প্রসারণ বা Enlargement।

O হ'ল কেন্দ্র এবং r হল প্রসারণের Scale factor। যদি $r>0$ হয়, A এবং A'. O-র একই দিকে থাকবে এবং যদি $r<0$ হয়, O, A এবং A'-র মধ্যে থাকবে।



তাই O, A এবং A' জানা থাকলে r নির্ণয় করা যায় এবং তখন যে কোন বিন্দু, যেমন B-র প্রতিবিম্বও নির্ণয় করা সম্ভব হয়।

যদি AB র সমান্তরাল ক'রে A'র মধ্য দিয়ে একটি সরলরেখা টানি যা, OB-র বর্ধিতাংশের সহিত B'-র সঙ্গে মিলিত হয়; তখন B' হবে B-এর প্রতিবিম্ব। বিপরীতক্রমে B' দেওয়া থাকলে আমরা B নির্ণয় করতে পারি।

এর থেকে জানা যায় যে প্রসারণ **এক-এক চিত্রবিশিষ্ট** (one-one mappings)।

উপরের চিত্র থেকে দেখা যায় যে প্রসারণ সব সময় রেখা বরাবর (line-preserving) রূপান্তরীকরণ এবং কোন রেখা বা প্রতিবিম্ব সর্বদাই সমান্তরাল।

যদি A-র মধ্য দিয়া AC কে কল্পনা করি, তাহলে এর প্রতিবিম্ব হবে A'C' এবং ইহা AC-র সমান্তরাল। তাহলে AB ∥ A'B' এবং AC ∥ A'C'। সেজন্য রূপান্তরীকরণের দ্বারা AB ও AC-র মধ্যবর্তী কোণটি রক্ষিত হচ্ছে। তাই প্রসারণ হ'ল কোণ-সংরক্ষণভিত্তিক রূপান্তরীকরণ।

আবার যেহেতু, $\frac{OA'}{OA}=\frac{A'B'}{AB}=r,$

অনুরূপ রেখাংশের দৈর্ঘ্যগুলির অনুপাত হ'ল $1:r$।

অনুসিদ্ধান্ত : প্রসারণ – দূরত্বের অনুপাতকেও সংরক্ষিত করে।

উদাহরণ (১)

C_1 এবং C_2 বৃত্তদ্বয়ের ছেদবিন্দু P এর মধ্য দিয়া একটী রেখা এমন ভাবে আঁকতে হবে যে, এই রেখার জ্যাগুলির দৈর্ঘ্যের অনুপাত হবে 3:4।

মনে করি C_1 বৃত্তের কেন্দ্র O_1, O_1P যুক্ত করে O_1' পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করলাম যেন $O_1'P : O_1P=4:3$ হয়, তখন C_1 বৃত্তের প্রতিবিম্ব হবে $O_1'P$ ব্যাসার্দ্ধ ও O_1' কেন্দ্রবিশিষ্ট এক বৃত্ত, যার নাম C_1'।

যদি C_1', C_2 কে A′ বিন্দুতে ছেদ করে তাহলে A′PA রেখাই হবে উদ্দিষ্ট রেখা। A′P যুক্ত ও বর্দ্ধিত করে C_1 কে A বিন্দুতে ছেদ করলে এই রেখা পাওয়া যাবে।

যেহেতু অঙ্কন অনুযায়ী Aর প্রতিবিম্ব হ'ল A′, $\therefore$ $PA : PA' = -\frac{3}{4}$ এবং ইহাই উদ্দিষ্ট ফল।

ঘন জ্যামিতি (Solid Geometry)

শিশু সাধারণভাবে যে সমস্ত জিনিষ নিয়ে নাড়াচাড়া করে তার বেশীর ভাগই হচ্ছে ঘনবস্তু। এই ত্রিমাত্রিক ঘনবস্তুর প্রত্যক্ষ তার কাছে শিক্ষার দ্বারা অর্জিত নয়; বরং দ্বিমাত্রিক বস্তুর জ্ঞান কিছুটা শিক্ষালব্ধ। তাই প্রাকৃতিক ঘনবস্তুর সম্পর্কে বিশেষ ধারণা লাভ করতে হ'লে ঘনবস্তুর ধারণা থাকা উচিত। তাছাড়া ব্যবহার্য বস্তু সমূহের বেশীরভাগ ঘনবস্তু হওয়ায় তাদের আকার, ওজন, পরিমাণ সম্পর্কেও জ্ঞান থাকা দরকার।

ঘনবস্তুর প্রত্যক্ষ ধারণা থাকলেও গণিতে ঘনবস্তুর বিবেচনা দ্বিমাত্রিক আকার বিবেচনা করার পরই করা হয়। এই জন্য তার বিস্তৃত রূপ হিসাবে ত্রিমাত্রিক জ্যামিতির বিবেচনা করা যুক্তিসংগত। এদের মধ্যে যেমন শিক্ষাগত সম্পর্ক রয়েছে তেমনি মনোবিজ্ঞানসম্মত সম্বন্ধও রয়েছে। শিশুর মানসিক প্রতিরূপ দ্বিমাত্রিক জ্যামিতির মাধ্যমে সংগঠিত হওয়ার পর তারই পটভূমিতে ত্রিমাত্রিক ধারণা দান করা সহজ ও সাবলীল হয়।

দ্বিমাত্রিক জ্যামিতি চিত্রের মাধ্যমেও উপস্থাপন করা যায়, কিন্তু ত্রিমাত্রিক জ্যামিতি উপস্থাপন করতে গেলে মডেল বা বাস্তব উদাহরণের আশ্রয় নেওয়াই শ্রেয়। অবশ্য যতদূর সম্ভব Perspective চিত্র এঁকেও ত্রিমাত্রিক জ্যামিতির ধারণা দেওয়া যায়। এরূপ চিত্রাঙ্কনে শিক্ষার্থীদের সাহায্য করা একান্ত কর্তব্য। তাছাড়া পদার্থবিজ্ঞান, কারিগরী-বিজ্ঞান, প্রভৃতি শিক্ষাক্ষেত্রে ত্রিমাত্রিক জ্যামিতির চিত্রায়ণ ও ধারণা বিশেষ প্রয়োজনীয়। এই হিসাবে ঘনজ্যামিতির স্থান গণিতের পাঠক্রমে বিশেষ স্থান লাভ করেছে। তবে নতুন পাঠক্রমে ঐচ্ছিক গণিতের মধ্যে এটি অন্তর্ভুক্ত হয়েছে; অর্থাৎ যাদের বিজ্ঞান বা গাণিতিক দক্ষতা ও প্রবণতা রয়েছে তারাই ঐ ঐচ্ছিক গণিত পড়বার অধিকারী এবং তাদের পক্ষে এই ধরণের ধারণা লাভ করাও সুবিধাজনক।

ত্রিকোণমিতি (Trigonometry)

Trigonometry শব্দটি ভেঙ্গে দেখলে দুটি শব্দ পাওয়া যায়। Trigonom- অর্থ ত্রিভুজ এবং Matria অর্থ মাপ, সুতরাং শব্দটির অর্থ দাঁড়ায় ত্রিভুজের পরিমাপ। তাই এর নাম হয়েছে ত্রিকোণমিতি। ত্রিভুজের ছয়টি অংগের মধ্যে যে কোন তিনটি জানা থাকলে ত্রিকোণমিতির সাহায্যে তা নির্ণয় করা সম্ভব। তাছাড়া ত্রিকোণমিতির কোণানুপাতের সাহায্যে ত্রিভুজ সংক্রান্ত অনেক সমস্যার সমাধান করা যায়।

জ্যামিতির মাধ্যমেই ত্রিকোণমিতির সূত্রপাত। এর ভিত্তিভূমিই হল দুটি সদৃশ ত্রিভুজ। দুটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ ছাড়া অন্য যে কোন একটি কোণ পরস্পর সমান হলেই ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী বা সদৃশ হয়; সুতরাং একটি নির্দিষ্ট পরিমাণ কোণ-বিশিষ্ট সমস্ত সমকোণী ত্রিভুজের ঐ কোণ সাপেক্ষে যে কোন দুই বাহুর অনুপাত একই থাকবে।

ঋজুরেখ ক্ষেত্রের মধ্যে ত্রিভুজের যে সুবিধা, বক্ররেখ ক্ষেত্রের মধ্যে বৃত্তেরও সেই সুবিধা। যে কোন দুটি বৃত্ত সদৃশ ক্ষেত্র. আবার দুটি এককেন্দ্রিক বৃত্তও সদৃশ ক্ষেত্র, সুতরাং কেন্দ্রে কোন একটি নির্দিষ্ট কোন বিবেচনা করলে সৃষ্ট চাপ দুটির অনুপাত ব্যাসার্দ্ধ দুটির অনুপাতের সমান হয় অর্থাৎ চাপ/ব্যাসার্দ্ধ, কোণটির সহিত জড়িত একটি স্থির সংখ্যা। একেই বলা হয় কোণের বৃত্তীয় মান। একক বৃত্তীয় মান হল এক রেডিয়ান।

উচ্চতা, অবনতি ও দূরত্ব নির্ণয়ে, জমি জরীপে, নদীর বিস্তার নির্ণয়ে, কারিগরী বিদ্যায়, উচ্চতর গণিতের বাহু শাখায় ত্রিকোনমিতির প্রয়োগ রয়েছে।

ত্রিকোণমিতি শিক্ষণে সমস্যামূলক পদ্ধতিই অবলম্বন করা শ্রেয়। যে মানসিক বয়সে শিক্ষার্থীরা ত্রিকোণমিতি শিখতে শুরু করে, তখন পর্য্যবেক্ষণ ও পরীক্ষা নিরীক্ষা ভিত্তিক মনোবিজ্ঞান সম্মত প্রণালীর প্রয়োজন গৌণ হয়ে পড়ে। সেজন্য শিক্ষার্থীর আগ্রহ, উৎসাহ ও প্রচেষ্টাকে উৎকর্ষিত করার জন্য উচ্চতা বা দূরত্ব সংক্রান্ত সহজ সমস্যাকে অবলম্বন করে ত্রিকোণমিতি উপস্থাপন করাই যুক্তিযুক্ত। যেমন—স্কুল-প্রাঙ্গণ সংলগ্ন একটি সুপারী গাছের উচ্চতা নির্ণয় করা বা নিকটস্থ কোন নদী বা বিলের প্রস্থ নির্ণয় করা প্রভৃতি।

এছাড়া কোণানুপাত সংক্রান্ত সূত্রগুলি নানা জায়গায় প্রয়োগ করে তালিকার সঙ্গে মিলিয়ে দেখলে কোণানুপাতের ধারণা হবে দৃঢ়। তবে ত্রিকোণমিতির সঙ্গে বীজগণিত ও জ্যামিতির অনুবন্ধ রেখেই শিক্ষাদান যুক্তিসঙ্গত।

স্থানাঙ্ক জ্যামিতি (Co-ordinate Geometry) :

কার্যতঃ বীজগণিত ও জ্যামিতির সমন্বয়ে গড়ে উঠেছে স্থানাঙ্ক জ্যামিতি অর্থাৎ বীজগণিতের সাহায্যে জ্যামিতিকে প্রকাশ করার পদ্ধতিই হলো স্থানাঙ্ক জ্যামিতি। জ্যামিতির মধ্যে বিভিন্ন বস্তুর অবস্থান নির্ণয়, আকারের পার্থক্য নির্ণয়, দূরত্ব, আয়তন, ক্ষেত্রফল নির্ণয়, বিন্দু, রেখা, তল সংক্রান্ত বহু বিষয় বীজগণিতের সাহায্যেও প্রকাশ করা যায়। এইভাবে বীজগণিতের সাহায্যে গাণিতিক সম্বন্ধযুক্ত জ্যামিতিকে ব্যাখ্যা করার পদ্ধতিই হল স্থানাঙ্ক জ্যামিতি।

ফরাসী দার্শনিক Descartes-ই প্রথম স্থানাঙ্ক জ্যামিতির প্রবর্তন করেন। বীজগণিতে দিকনির্দেশক সংখ্যা সম্পর্কে ধারণা ও দক্ষতা জন্মাবার পর বীজগণিতের সঙ্গে অনুবন্ধ স্থাপন করে স্থানাঙ্ক জ্যামিতি উপস্থাপন করা যেতে পারে।

স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে সঞ্চারপথ একটি বিশেষ স্থান অধিকার করে আছে। এই সঞ্চারপথের ধারণাকে পরিষ্কার করার জন্য জ্যামিতি ও বীজগণিতের সম্বন্ধটি সুস্পষ্টভাবে উপস্থাপন করা প্রয়োজন। বিশেষ করে সঞ্চার পথের ক্ষেত্রে বীজগণিতের লেখচিত্রের প্রয়োগ সম্পর্কে জ্ঞান থাকা বিশেষ প্রয়োজন। সঞ্চারপথ নির্ণয়ে তাই প্রতীকমূলক ভাষা ব্যবহারের দক্ষতা থাকা দরকার। সেজন্যই সমস্যামূলক পদ্ধতির মাধ্যমে প্রতীকমূলক ভাষা ব্যবহারের দক্ষতা অর্জন করবার জন্য শিক্ষার্থীদের কাছে স্থানাঙ্ক জ্যামিতি এক বিশেষ স্থান অধিকার করে আছে।

প্রশ্নাবলী

1. What are the drawbacks of the Euclidean mode of presentation of Geometry for School children ? Discuss in this connection the changes that have taken place in recent years in the organisation and treatment of the subject-matter and their pedagogical implication. [C. U. B. T. '66]

2. Discuss the Origin and Development of Geometry. [C. U. B. T. '66]

3. Discuss the place of intuition, observation and experience in the teaching of Geometry. [C. U. B. T '67]

4. Compare and contrast the essential of modern methods of approach to Geometry with the older method of teaching the

subject and State your views regarding the effectveiness of the former for the achivement of the goals of teaching Geometry.

[C. U. B. T. '68, B. U. B. Ed. '69]

5. What is meant by Non-Euclidean Geometry ? Write in brief about its origin and development. [C. U. B. Ed. '64]

6. Discuss the different stages of the Geometry Course in Secondary Schools. [C. U. B. Ed. '70]

7. Write notes on :—

(a) Trigonometry—how and when to introduce, its uses [B. U. B. Ed. 67, '68]

(b) Co-ordinate and Solid Geometry—how to introduce.

(c) Basic Cocepts of Transformation Geometry.

(d) Place of Reflection, Symmetry, Translation, Rotation and Enlargement in the teaching of Geometry.

———

॥ ত্রয়োদশ অধ্যায় ॥

গণিত শিক্ষণে কয়েকটী প্রদীপণ (Some Teaching aids in the teaching of Mathematics)

১। দৈর্ঘ্য ও ওজনের ক্ষেত্রে মেট্রিক পদ্ধতির তালিকা :

1000	100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
কিলো	হেক্টো	ডেকা	মি./গ্রা.	ডেসি	সেন্টি	মিলি.

২। 1 থেকে 100 এর মধ্যে 26টি মৌলিক সংখ্যার তালিকা :

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37,
41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97,

৩। বিভাজ্যতা নির্ণায়ক তালিকা :

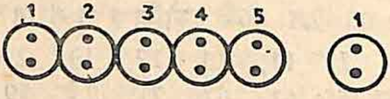
কোন্ সংখ্যা দ্বারা বিভাজ্য	সর্ত্তাবলী
2	সংখ্যার এককের স্থানের অঙ্ক 2 বা 2-এর গুণিতক দিয়ে বিভাজ্য হবে বা 0 (শূন্য) থাকবে।
3	সংখ্যার অঙ্কগুলির সমষ্টি 3 দিয়ে বিভাজ্য হবে।
4	সংখ্যার একক ও দশক উভয় স্থানে 0 (শূন্য) থাকবে কিংবা ঐ ছুটো স্থানের অঙ্ক দিয়ে গঠিত সংখ্যা 4 দিয়ে বিভাজ্য হবে।
5	সংখ্যার এককের স্থানের অঙ্ক 0 (শূন্য) বা 5 হবে।
6	সংখ্যার এককের স্থানের অঙ্কটা জোড় বা শূন্য এবং পূরো সংখ্যাটা 3 দিয়ে বিভাজ্য হবে।
8	সংখ্যার একক দশক এবং শতকের অঙ্কগুলোর প্রতিটাই 0 (শূন্য) হবে বা ঐ তিনটে অঙ্ক দিয়া গঠিত সংখ্যা 8 দিয়ে বিভাজ্য হবে।
9	সংখ্যার অঙ্কগুলোর সমষ্টি 9 দিয়ে বিভাজ্য হবে।
10	সংখ্যার একক স্থানের অঙ্ক 0 (শূন্য) হবে।
11	সংখ্যার জোড় স্থানের অঙ্কগুলোর সমষ্টি ও বিজোড় স্থানের অঙ্কগুলোর সমষ্টির অন্তরফল 0 (শূন্য) বা 11 দিয়ে বিভাজ্য হবে।
12	সংখ্যাটি 3 এবং 4 দ্বারা বিভাজ্য হবে।

৪। ভগ্নাংশ ও দশমিক ভগ্নাংশ সম্পর্কিত শিক্ষা-প্রদীপণ: আগেই আলোচিত হয়েছে।

৫। ভাগ প্রক্রিয়ায় বর্গমূল সম্পাদন সম্পর্কে শিক্ষা প্রদীপণ: আগেই দেখানো হয়েছে।

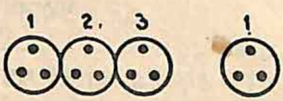
৬। অনুপাত:

5 : 1 =



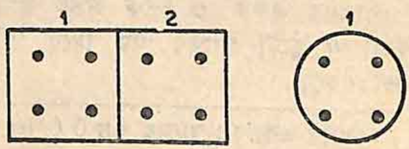
5 গুণ

3 : 1 =



3 গুণ

2 : 1 =



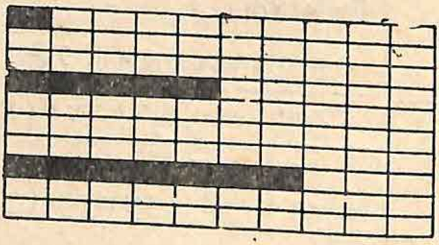
2 গুণ

৭। শতকরা হিসাব:

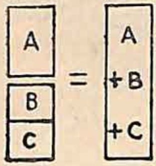
$1\% = \frac{1}{100} = \cdot01$

$5\% = \frac{5}{100} = \cdot05$

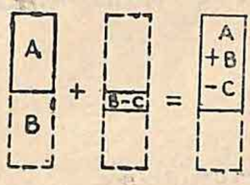
$7\% = \frac{7}{100} = \cdot07$



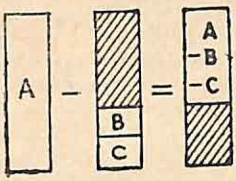
৮। বীজগণিতের যোগ, বিয়োগ ও গুণের ক্ষেত্রে বন্ধনীর ব্যবহার ঃ



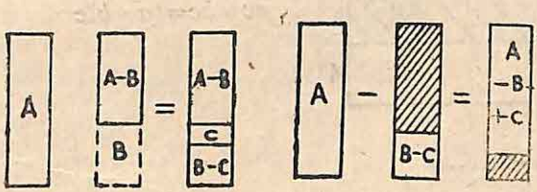
$A+(B+C)=A+B+C$



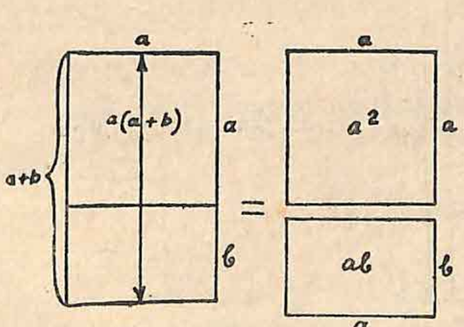
$A+(B-C)=A+B-C$



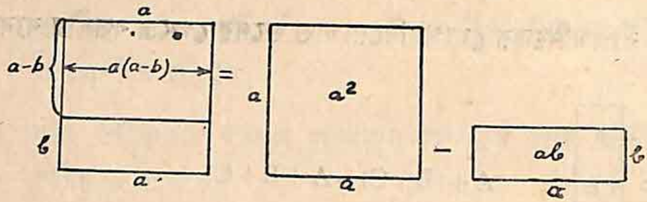
$A-(B+C)=A-B-C$



$A-(B-C)$
$=A-B+C$



$a(a+b)=a^2+ab$

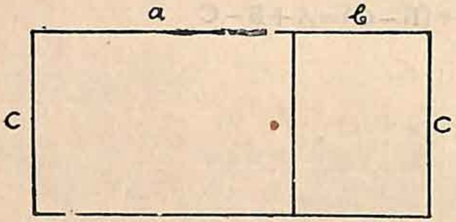


$$a(a-b)=a^2-ab$$

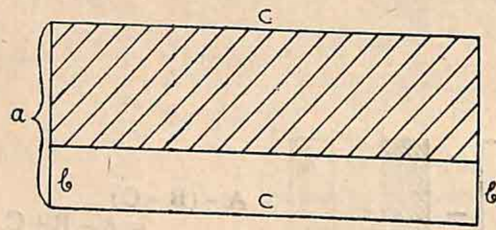
৯। সমীকরণ সম্পর্কীয় শিক্ষাপ্রদীপণ: পাঠটীকায় দ্রষ্টব্য।

১০। দ্বিঘাত সমীকরণ সম্পর্কে শিক্ষাপ্রদীপণ: আগেই আলোচিত হয়েছে।

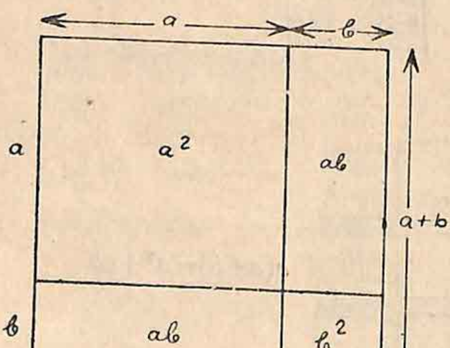
১১। উৎপাদক বিশ্লেষণ ও সূত্রাবলী:



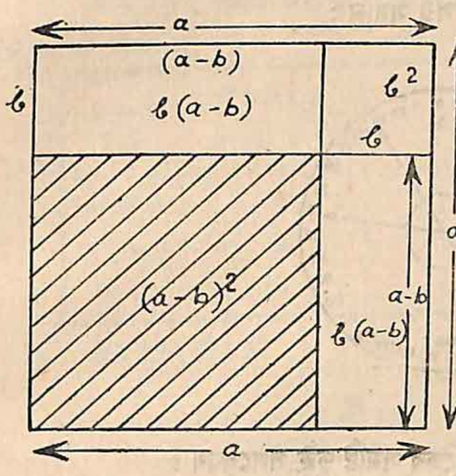
$$ac+bc=(a+b)c$$



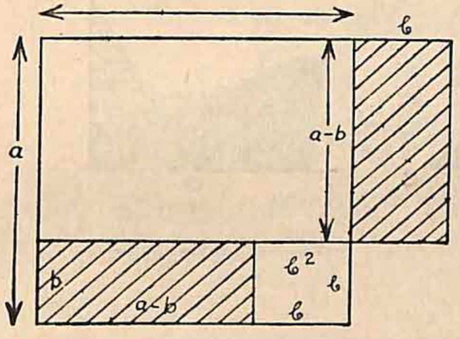
$$ac-bc=(a-b)c$$



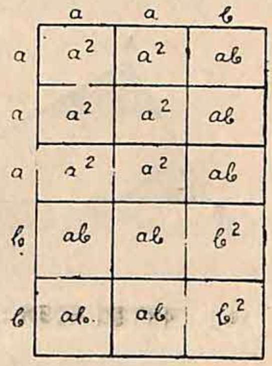
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$



$$(a-b)^2$$
$$= a^2 - b(a-b) - b(a-b) - b^2$$
$$= a^2 - ab + b^2 - ab + b^2 - b^2$$
$$= a^2 - 2ab + b^2$$

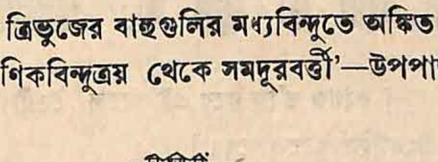


$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$



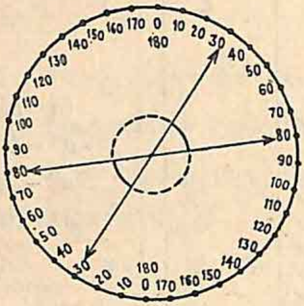
$(2a+b)(3a+2b)$
$= 6a^2 + 7ab + 2b^2$

১২। 'কোন ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুতে অঙ্কিত লম্বত্রয় সমবিন্দু এবং বিন্দুটি কৌণিকবিন্দুত্রয় থেকে সমদূরবর্ত্তী'—উপপাদ্যটীর ব্যবহারিক প্রয়োগ ঃ

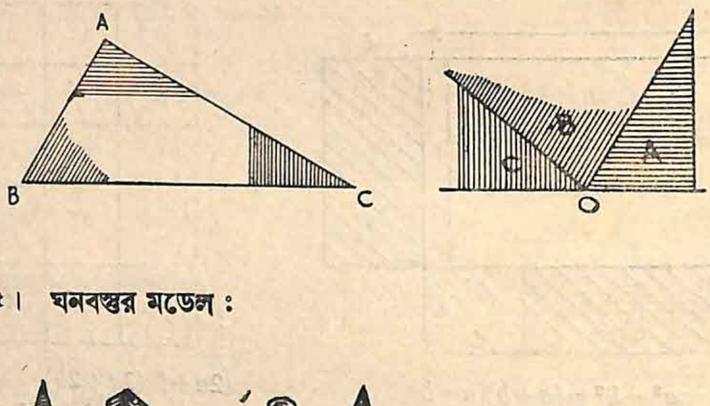


(তিনটী পাড়ার সমান দূরত্বে একটী টিউবওয়েল বসাতে হবে)

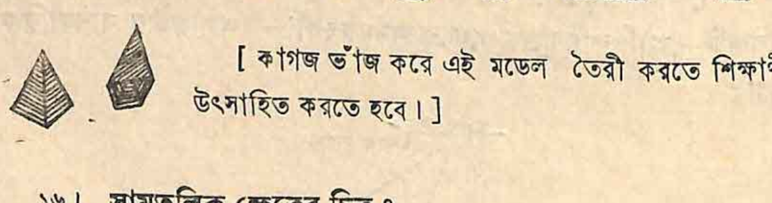
১৩। **বিপ্রতীপ কোণদ্বয় পরস্পর সমান :**



১৪। **ত্রিভুজের অন্তঃকোণসমূহের সমষ্টি দুই সমকোণ :**

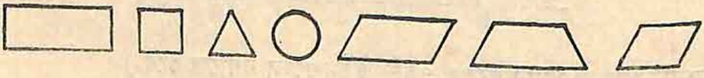


১৫। **ঘনবস্তুর মডেল :**



[কাগজ ভাঁজ করে এই মডেল তৈরী করতে শিক্ষার্থীদের উৎসাহিত করতে হবে।]

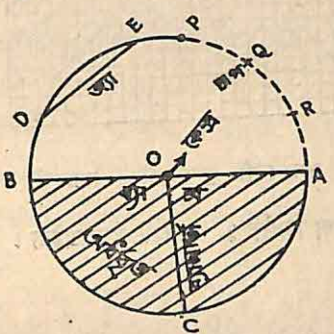
১৬। **সামতলিক ক্ষেত্রের চিত্র :**



১৭। **আয়তঘন, ঘনক ও চতুস্তলকের শীর্ষবিন্দু, ধার বা প্রান্তরেখা এবং পার্শ্বতলের মধ্যে সম্পর্ক ঃ** $[X+Y-M=2]$

ঘনবস্তু	শীর্ষ-বিন্দুর সংখ্যা (X)	ধারের সংখ্যা (Y)	তলের সংখ্যা (M)
চতুস্তলক	4	6	4
আয়তঘন	8	12	6
ঘনক	8	12	6

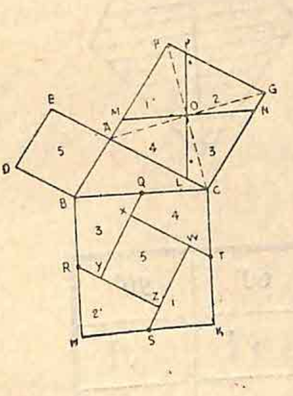
১৮। **বৃত্ত সম্পর্কীয় ঃ**



১৯। **প্রতিফলন ও প্রতিসাম্য সম্পর্কীয় ঃ** পূর্বেই আলোচিত হয়েছে।

২০। **পীথাগোরাসের উপপাদ্য ঃ**

অঙ্কন ঃ



(1) ACGFএর কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু O, AN ∥ BC

(2) POL ⊥ MN

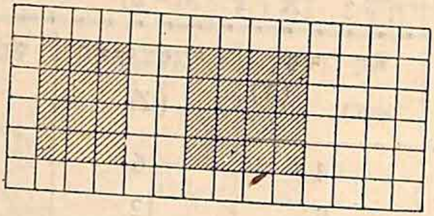
(3) Q, R, S, T যথাক্রমে BC, BH, HK এবং CKর মধ্যবিন্দু

(4) AB ∥ QXY এবং SZW, AC ∥ TWX এবং RYZ

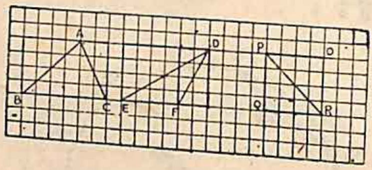
(5) $1'=1, 2'=2, 3'=3, 4'=4$ এবং $5'=5$ হবে

[এটি কাগজ কেটে কেটেও করা যেতে পারে]

২১। আয়ত ক্ষেত্র ও বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় ঃ



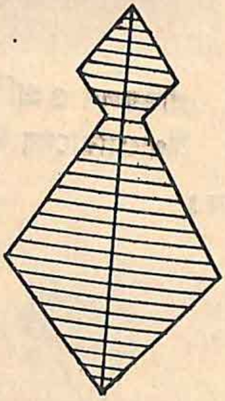
২২। ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ঃ



সূক্ষ্মকোণী স্থূলকোণী সমকোণী

২৩। বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় ঃ পাঠটীকায় দ্রষ্টব্য।

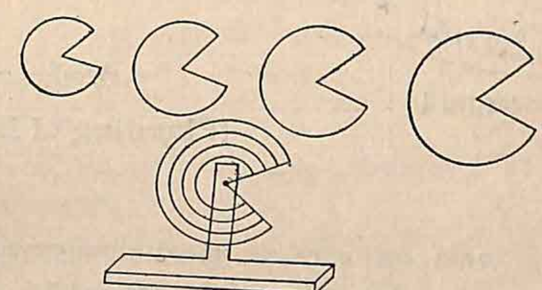
২৪। সঞ্চারপথ ঃ [The locus of points equidistant from two given points is the perpendicular bisector of the line joining the two points.]



২৫। ত্রিকোণমিতির কোণানুপাত :

কোন	0°	30°	45°	60°	90°
→ সাইন	$\sqrt{\frac{0}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{2}{4}}$	$\sqrt{\frac{3}{4}}$	$\sqrt{\frac{4}{4}}$
← কস	$\sqrt{\frac{4}{4}}$	$\sqrt{\frac{3}{4}}$	$\sqrt{\frac{2}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{0}{4}}$

২৬। **এক রেডিয়ান কোণ ধ্রুবক কোণ** :



২৭। **ঘূর্ণন, প্রসারণ, অবস্থানান্তরিত-করণ সম্পর্কীয়** : পূর্বেই আলোচিত হয়েছে।

এইভাবে কাগজ কেটে বা ভাঁজ করে জ্যামিতির বিভিন্ন উপপাদ্যগুলি শিক্ষার্থীদের সামনে উপস্থাপন করলে জ্যামিতি-শিক্ষণ হবে স্থায়ী ও ফলপ্রদ। এ ব্যাপারে বিদ্যালয়ের গণিতের নতুন পাঠক্রমের বিভিন্ন পুস্তক আলোচনা করা যেতে পারে।

প্রশ্ন

1. Make a list of usable teaching appliances, aids, models, diagrams, charts with suitable illustrations.

॥ চতুর্দশ অধ্যায় ॥

পাঠ-পরিকল্পনা
(Planning of Lessons)

শিক্ষাকার্য্যে সফলতা অর্জন করতে হলে পূর্ব-পাঠ-পরিকল্পনার প্রয়োজনীয়তাকে অস্বীকার করা যায় না। প্রস্তুতি ও পরিকল্পনাবিহীন কাজ করা আর লক্ষ্যহীন নৌকা চালানো একই কথা। তাই **শ্রেণীপাঠনা** বা Class Teaching হচ্ছে, **শিক্ষকের এক গুরুত্বপূর্ণ দায়িত্ব**। শ্রেণীপাঠনার দায়িত্ব ঠিকভাবে পালন করতে হলে পাঠ-পরিকল্পনার অবশ্যই প্রয়োজন। শিক্ষককে স্থির করতে হবে যে, তিনি কি পড়াবেন, কোন পদ্ধতিতে পড়াবেন। শিক্ষকের এই প্রস্তুতির মধ্যে থাকবে এক **ধারাবাহিকতা**। সুষ্ঠুভাবে দৈনন্দিন শ্রেণীশিক্ষা পরিচালনার জন্য লিখিত প্রস্তুতি বা পরিকল্পনাকে বলা হয় **পাঠটীকা বা পাঠ-পরিকল্পনা**।

পাঠ-টীকার সংজ্ঞা

একজন গণিত শিক্ষক তাঁর শিক্ষাদানের পরিকল্পনা নিম্নলিখিত উপায়ে করতে পারেন :

(1) **Long range Planning :** এক বছরে কতটা পড়াবেন সেই সমস্ত বিষয়টি **বিভিন্ন ইউনিটে** (Unit) **ভাগ** করে নিয়ে পাঠদানে অগ্রসর হবেন।

গণিতশিক্ষা পরিকল্পনার বিভিন্ন উপায়

(2) **Topic or Unit Planning :** সমগ্র বিষয়কে বিভিন্ন ইউনিটে ভাগ করার পর **একদিন বা কয়েকদিন বা কয়েক সপ্তাহে কতটা পড়াবেন তার একটী নির্দিষ্ট ছক বা** পরিকল্পনা প্রস্তুত করবেন।

(3) **Lesson Planning : একটী পাঠ্যবিষয়ের সুষ্ঠু পরিকল্পনা** যাকে অবলম্বন ক'রে শিক্ষক শিক্ষণীয় বিষয়টি সহজ ও সাবলীল ভাবে শিক্ষার্থীদের কাছে উপস্থাপন করতে পারবেন।

শ্রেণীকক্ষে পাঠদানের জন্য শিক্ষাবিদ ও মনোবিজ্ঞানী হার্বাটকে অনুসরণ করে

শিক্ষায় পাঠ-পরিকল্পনার প্রবর্তন ঘটেছে। হার্বাটের মতে পাঠদানের সার্থকতা নির্ভর করে **শিক্ষার্থীর মনোনিবেশ** (concentration) এবং **তার পূর্বসঞ্চিত অভিজ্ঞতা ও ধারণার মধ্যে নতুন পাঠের সম্পর্ক রচনার ওপর**। তাই তিনি পাঠ-পরিকল্পনায় মনোবিজ্ঞান অনুযায়ী চারটে স্তর-বিন্যাসের কথা বলেছিলেন। স্তরগুলো হ'লো—**সুস্পষ্টতা** (Clearness), **সংযোগ** (Association), **বিন্যাসসাধন** (Systematisation) এবং **প্রয়োগ-পদ্ধতি** (Method)।

হার্বাটের শিক্ষাতত্ব ও স্তর

হার্বাটের এই চারটি স্তরকে অনুসরণ করে তাঁর অনুগামীরা কিছুটা পরিবর্তিত করে পাঁচটি সোপানে দাঁড় করান। সেগুলি হ'ল: (১) প্রস্তুতি বা আয়োজন (Preparation), (২) উপস্থাপন (Presentation), (৩) তুলনা (Comparison), (৪) সাধারণীকরণ (Generalisation), (৫) প্রয়োগ অভিযোজন (Application)। আধুনিক মনোবিজ্ঞানীরা পাঠ পরিকল্পনার ক্ষেত্রে পাঁচটি সোপানকে সংক্ষিপ্ত আকারে তিনটি সোপানের প্রবর্তনকে সমর্থন করেছিল। এই **ত্রি-সোপান** হ'ল যথাক্রমে **প্রস্তুতি বা আয়োজন** (Preparation) **উপস্থাপন** (Presentation) এবং **প্রয়োগ বা অভিযোজন** (Application)। **প্রথম সোপানে** শিক্ষার্থীর আয়ত্তীকৃত পূর্ব-অভিজ্ঞতার উদ্দীপন, নতুন পাঠের সঙ্গে সম্বন্ধ নির্ণয় এবং পাঠঘোষণাকে অন্তর্ভুক্ত করা হয়। **দ্বিতীয় সোপানে** পাঠটিকে ধীরে ধীরে যে কোন পদ্ধতি অবলম্বন করে শিক্ষার্থীর কাছে তুলে ধরা হয়। পর্যবেক্ষণ, পরীক্ষা, সিদ্ধান্তগ্রহণ, বিশ্লেষণ প্রভৃতির মাধ্যমে পাঠ সংগঠনের কাজটি সুসম্পন্ন হয়। **তৃতীয় সোপানে** পাঠের সার্থকতা বিচার করাহয়।

শিক্ষাদানে ত্রি-সোপান

নির্দিষ্ট শ্রেণী ও সময়ের সংগতিবিধান করে পাঠ-পরিকল্পনা গড়ে তুলতে হয়। **পঠনীয় বিষয়ের চরিত্র অনুযায়ী পরিকল্পনার নীতি ও পরিচালনা নির্দিষ্ট করতে হয়।** যেহেতু **গণিত দক্ষতামূলক পাঠ** (Skill lesson) তাই প্রতিটি স্তরের প্রশ্নগুলি হবে, শিক্ষার্থীর যুক্তি,বিচার,বিশ্লেষণ প্রভৃতি মানসিক শক্তির উৎকর্ষের সহায়ক, যেগুলি পরবর্তীকালে শিক্ষার্থীর প্রয়োগমূলক ক্ষমতাকে বর্দ্ধন করতে সাহায্য করবে। গণিতশিক্ষাদানের দৃষ্টিভঙ্গী হবে **আবিষ্কারকের দৃষ্টিভঙ্গী** (Heuristic attitude)। তাই গণিতে **সংশ্লেষণ** (Synthetic) **পদ্ধতি অপেক্ষা বিশ্লেষণ** (Analytic) **পদ্ধতি, অবরোহী** (Deductive) **পদ্ধতি অপেক্ষা আরোহী পদ্ধতি** (Inductive) **অবলম্বন করাই যুক্তিযুক্ত।**

গণিতের ক্ষেত্রে পদ্ধতি অবলম্বন

গণিত এক ধারাবাহিক বিষয়। এর কোন বিচ্ছিন্ন অংশ নেই। পাঠ-পরিচালনার সুবিধার জন্য হয়ত পাঠ্যবিষয়কে কয়েকটি অংশে ভাগ করে নেওয়া হয়, তাহ'লেও **প্রতিটি অংশ হবে স্বয়ংসম্পূর্ণ** অর্থাৎ শিক্ষার্থীরা যেন বুঝতে পারে যে পাঠশেষে তারা একটা নতুন অথচ স্বয়ংসম্পূর্ণ প্রয়োগভিত্তিক কিছু শিখেছে।

গণিত স্বয়ংসম্পূর্ণ বিষয়

প্রতিটি পাঠের উদ্দেশ্য হিসাবে প্রত্যক্ষ ও পরোক্ষ—এই দুভাগে ভাগ করা গেলেও **সমন্বিত একক উদ্দেশ্য স্থির করাই শ্রেয়**। পাঠদানের সময় প্রশ্নের সংখ্যা ও প্রকৃতি, উপকরণের প্রকৃতি ও উপস্থাপনপদ্ধতি পিরিয়ডের সময়কাল, শিক্ষার্থীর মানসিক বয়স, শিক্ষকের যোগ্যতা প্রভৃতি বিষয়গুলি বিশেষভাবে বিবেচনা করা দরকার। গণিতশিক্ষাদানে "সক্রিয়তার ভিত্তিতে শিক্ষাদান" নীতিই গ্রহণ করা বাঞ্ছনীয়। এখানে পাঠটীকার কয়েকটী নমুনা দেওয়া হল, তা থেকেই অন্যান্য পাঠপরিকল্পনার আভাস কিছুটা পাওয়া যাবে।

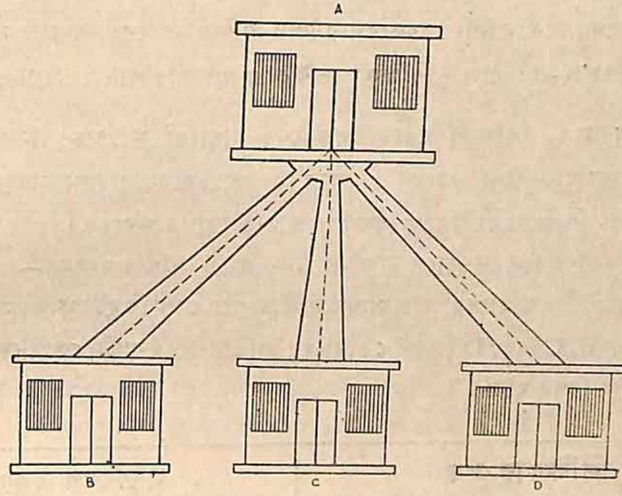
গণিতশিক্ষার অন্যান্য দিক

পাঠ-টীকা—1

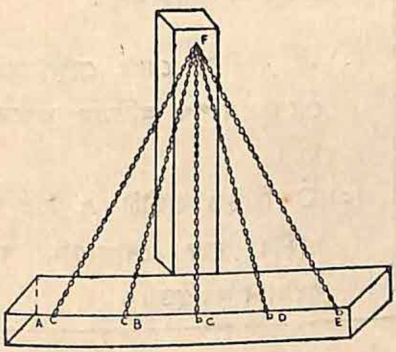
নব বারাকপুর উচ্চ বালিকা বিদ্যালয়	বিষয় : জ্যামিতি
সপ্তম শ্রেণী	সাধারণ পাঠ—লম্ব ও তির্যকের সম্বন্ধ নির্ণয়।
ছাত্রীসংখ্যা—৪০	অদ্যকার পাঠ—পরিমাপ দ্বারা প্রমাণ করো যে কোন সরলরেখার বহিঃস্থিত কোন নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে ঐ সরলরেখার উপর অঙ্কিত সরলরেখা সমূহের মধ্যে লম্বের দৈর্ঘ্যই ক্ষুদ্রতম।
গড় বয়স—১২ +	
সময়—৪০ মিনিট	
তারিখ—৯.৪.৭৪	
শিক্ষিকা—চায়না চাটার্জ্জী	

উদ্দেশ্য : বহিঃস্থিত কোন নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে কোন সরলরেখার উপর অঙ্কিত সরলরেখা সমূহের মধ্যে লম্বের দৈর্ঘ্য ক্ষুদ্রতম ; এই তথ্য জানতে ছাত্রীদের সাহায্য করা এবং তাদের যুক্তি, বিচার ও পর্যবেক্ষণ শক্তির বিকাশ সাধনে সহায়তা করা।

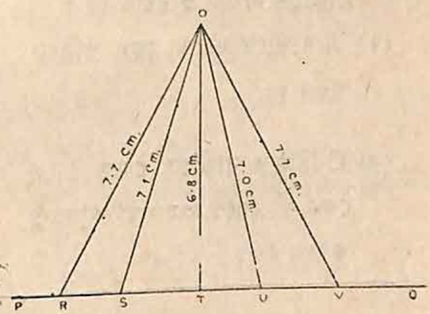
উপকরণ : লম্বই ক্ষুদ্রতম দৈর্ঘ্য ; এই তথ্য সম্পর্কিত চিত্র, জ্যামিতিক যন্ত্রাদি ও শ্রেণীকক্ষের সাধারণ উপকরণ।



( )



(২)



(৩)

আয়োজন : ছাত্রীদের কৌতূহল জাগ্রত করে তাদের মনকে নূতন পাঠে আগ্রহ সঞ্চার করবার জন্য পূর্ব্বজ্ঞানের ভিত্তিতে শিক্ষিকা নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলি জিজ্ঞাসা করবেন।

(১) একটি সরলরেখা অপর একটি সরলরেখার উপর লম্ব বল্‌তে কি বোঝ ?

(২) কোন সরলরেখার বহিঃস্থিত বিন্দু কাকে বলে ?

(৩) বহিঃস্থিত কোন বিন্দু থেকে কোন সরলরেখার ওপর কতগুলি সরলরেখা আঁকা যায় ?

(৪) ঐ সরলরেখাগুলির মধ্যে কটি লম্ব পাওয়া যাবে ?

পাঠঘোষণা : "আজ আমরা পরিমাপ দ্বারা প্রমাণ করব যে বহিঃস্থিত কোন নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর অঙ্কিত সরলরেখা সমূহের মধ্যে লম্বের দৈর্ঘ্যই ক্ষুদ্রতম"—এই বলে—শিক্ষিকা শ্রেণীকক্ষে অদ্যকার পাঠ ঘোষণা করবেন।

উপস্থাপন : শিক্ষিকা প্রথমে উপকরণের সাহায্যে ছাত্রীদের নিকট বিষয়টি বোধগম্য করাবার চেষ্টা করবেন। অতঃপর প্রশ্নোত্তরের মাধ্যমে ছাত্রীদের সক্রিয় সহযোগিতায় শিক্ষিকা শ্রেণীকক্ষে অদ্যকার পাঠ উপস্থাপন করবেন।

[শিক্ষিকা প্রথমে দেওয়ালে টাঙানো ১নং চিত্রটি দেখিয়ে বল্‌বেন—মনে কর A চিহ্নিত বাড়ীটি তোমাদের, তোমাদের বাড়ীর পরে বেশ কিছুটা ফাঁকা মাঠ, মাঠের অপর দিকে B, C এবং D তিনটি তোমাদের প্রতিবেশীদের বাড়ী, তোমাদের বাড়ীতে হঠাৎ কোন বিপদ ঘটল।]

শিক্ষিকার প্রশ্ন	ছাত্রীদের উত্তর
(১) সাহায্যের জন্য তাড়াতাড়ি কোন বাড়ীতে যাওয়া সুবিধাজনক ?	(১) C চিহ্নিত বাড়ীতে।
(২) ঐ বাড়ীতে যাওয়া কেন সুবিধাজনক ?	(২) ঐ বাড়ীতে যেতে গেলে সব থেকে কম পথ অতিক্রম করতে হয়।
(৩) C চিহ্নিত বাড়ীতে যেতে গেলে কেন সব থেকে কম পথ অতিক্রম করতে হয় ?	(৩) C চিহ্নিত বাড়ীটী A চিহ্নিত বাড়ীর সঙ্গে সোজাসুজি বা লম্বভাবে অবস্থিত।

সুতরাং উপরের উদাহরণ থেকে আমরা বুঝতে পারলাম যে কোন স্থান থেকে অপর কোন স্থানে যেতে হলে লম্বভাবে যাওয়া সুবিধাজনক, কারণ লম্বই ক্ষুদ্রতম।

বহিঃস্থিত কোন নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর অঙ্কিত সরলরেখা সমূহের মধ্যে লম্বের দৈর্ঘ্যই ক্ষুদ্রতম।

অতঃপর শিক্ষিকা আর একটি কাষ্ঠ নির্মিত ২নং উপকরণ দেখিয়ে বলবেন—

AE একটি কাঠের টুক্‌রা এবং CF কাঠটি AE কাঠের উপর লম্বভাবে অবস্থিত। AE কাঠের উপর A, B, C, D, E এই পাঁচটি হুক আছে এবং CF অংশে F স্থানে

একটি হুক আছে। শিক্ষিকা F হুকের সহিত A, B, C, D, E, এই পাঁচটি হুক বিভিন্ন সূতোদ্বারা সংযুক্ত করবেন।

শিক্ষিকার প্রশ্ন	ছাত্রীদের উত্তর
(১) সূতোগুলোর মধ্যে কোনটি AE কাঠের সঙ্গে লম্বভাবে অবস্থিত?	(১) FC সূতোটি।
(২) অপর সূতোগুলি AE কাঠের সঙ্গে কিভাবে আছে?	(২) তির্যকভাবে

অতঃপর শিক্ষিকা A, B, C, D, E হুকে আটকানো দিকগুলি খুলে দেবেন, কিন্তু প্রত্যেকটি সূতোই F হুকে আটকানো থাকবে। এখন প্রত্যেকটি সূতো F হুক থেকে FC বরাবর ঝুলিতে থাকবে।

(১) সূতোগুলোর মধ্যে কোন সূতোটির দৈর্ঘ্য সবচেয়ে কম?	(১) FC সূতোটির
(২) FC সূতোটি কিভাবে আছে?	(২) লম্বভাবে

তাহলে AE কাঠকে একটি সরলরেখা এবং ইহার উপরকার হুকগুলিকে এক একটি বিন্দু, F হুককে AE-র বহিঃস্থিত বিন্দু মনে করলে আমরা বলতে পারি যে, F থেকে AE এর উপর অঙ্কিত সরলরেখা সমূহের মধ্যে লম্বের দৈর্ঘ্যই ক্ষুদ্রতম।

"এবার আমরা এই সত্যতা জ্যামিতির সাহায্যে প্রমাণ করার চেষ্টা করব"—এই বলে শিক্ষিকা শ্রেণীকক্ষে নিম্নরূপ প্রশ্ন জিজ্ঞাসা করবেন।

পদ্ধতি	বিষয়বস্তু
[শিক্ষিকা বোর্ডে ৩নং চিত্রানুযায়ী PQ একটি সরলরেখা এবং O উহার বহিঃস্থিত কোন নির্দিষ্ট বিন্দু নেবেন]	
(১) O থেকে PQ-র দূরত্ব কিভাবে নির্ণয় করা যায়? [লম্ব আঁকবেন]	(১) লম্ব অঙ্কন করে।
(২) OT যদি PQ এর উপর লম্ব হয় তাহলে PQ এর উপরিস্থিত R, S, U, V বিন্দুগুলির সঙ্গে O বিন্দু যোগ করলে কি কি সরলরেখা পাওয়া যায়?	(২) OR, OS, OU, OV সরলরেখা

পদ্ধতি	বিষয়বস্তু
(৩) এই সরলরেখাগুলি PQ-র উপর O বিন্দু থেকে অঙ্কিত কেমন সরলরেখা ?	(৩) তির্যক সরলরেখা
(৪) OT লম্ব এবং OR, OS, OU, OV রেখাগুলির মধ্যে সম্বন্ধ নির্ণয় করতে হলে কি করা প্রয়োজন ? [কোন একটি ছাত্রীকে মাপতে বলবেন এবং শিক্ষিকা বোর্ডে পরিমাপগুলি লিখবেন ।]	(৪) OT লম্ব ও তির্যক রেখাগুলির দৈর্ঘ্য পরিমাপ করা প্রয়োজন
(৫) এই সরলরেখাগুলির মধ্যে কোনটি সবচেয়ে ক্ষুদ্রতম ?	(৫) OT এই লম্ব রেখার দৈর্ঘ্যই সবচেয়ে ক্ষুদ্রতম
(৫) তাহলে লম্ব ও তির্যকের মধ্যে সম্বন্ধ নির্ণয়ে আমরা কি সিদ্ধান্ত করতে পারি ?	(৬) লম্ব ও তির্যকের মধ্যে সম্বন্ধ নির্ণয়ে আমরা এই সিদ্ধান্তে আসতে পারি যে, কোন সরলরেখার বহিঃস্থ কোন বিন্দু থেকে ঐ সরলরেখার উপর অঙ্কিত সরলরেখার মধ্যে লম্বই ক্ষুদ্রতম।

অভিযোজন : ছাত্রীদের নবলব্ধ জ্ঞান পরীক্ষা করবার জন্য শিক্ষিকা শ্রেণীকক্ষে নিম্নলিখিত প্রশ্নের অবতারণা করবেন এবং প্রয়োজনবোধে ব্যক্তিগত সাহায্য করবেন।

(১) ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ। AC ইহার অতিভূজ। BC-র উপর D বিন্দু এবং BC-র বর্দ্ধিতাংশের উপর E বিন্দু নেওয়া হল। এখন AD, AE যোগ করে AB, AD, AC, এবং AE-র দৈর্ঘ্য নির্ণয় করে তাদের কম বেশীর যৌক্তিকতা দেখাও।

গৃহকাজ : শিক্ষিকা ছাত্রীদের বাড়ী থেকে নিম্নের প্রশ্নটি সমাধান করে আনতে বলবেন।

(১) ABCD একটি আয়তক্ষেত্র। প্রমাণ কর BD কর্ণ AD ও BC অপেক্ষা বৃহত্তর।

পাঠটীকা—2

বিদ্যালয়– কোদালিয়া আগাপুর উচ্চ বিদ্যালয়।

শ্রেণী—সপ্তম

ছাত্রসংখ্যা—40

গড় বয়স—12+

সময়—40 মিনিট

তারিখ—16.4.74

শিক্ষক—নলিনী ঘোষ

বিষয়— বীজগণিত।

সাধারণ পাঠ-- বীজগণিতের সূত্রাবলী।

বিশেষ পাঠ—$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

এই সূত্রটির প্রমাণ।

(অভ্যকার পাঠ)

উদ্দেশ্য ঃ দ্বিপদ রাশির বর্গ নির্ণয়ে ছাত্রদের সাহায্য করা এবং বীজগণিতের এই প্রাথমিক সূত্রটির প্রয়োগের মাধ্যমে বীজগণিতের প্রতি তাদের আগ্রহ সৃষ্টি করা।

উপকরণ ঃ শ্রেণীকক্ষের সাধারন উপকরণ ছাড়া কার্ডবোর্ডের তৈরী তিনটি বর্গক্ষেত্র ও দুটি আয়তক্ষেত্রের কয়েকটি সেট। বর্গতিনটির বাহুর দৈর্ঘ্যকে যথাক্রমে a, b এবং $a+b$ হিসাবে ধরতে হবে এবং আয়তক্ষেত্র দুটির প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য হবে b এবং প্রস্থ হবে a. [এর চিত্র সম্পর্কে ধারণা আগেই দেওয়া হয়েছে]

আয়োজন ঃ ছাত্রদের পূর্বজ্ঞানের ভিত্তিতে এইরকম প্রশ্ন করা হবে :—

(১) a-র বর্গ কত ?

(২) $b \times b$ কে আর কিভাবে লেখা যায় ?

(৩) $a \times b =$ কত ?

(৪) $ab+ab =$ কত ?

(৫) $(a+b)(a+b)$ কে আর কিভাবে লেখা যায় ?

পাঠ ঘোষণা ঃ "আজ আমরা $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$—এই সূত্রটি সম্পর্কে শিক্ষালাভ করব।" এই বলে শ্রেণীকক্ষে পাঠ ঘোষণা করা হবে।

উপস্থাপন ঃ শিক্ষকের করণীয়—প্রথম পর্যায় ঃ

শ্রেণীকক্ষের প্রথম থেকে শেষ বেঞ্চের যতগুলি সম্ভব ছাত্রের সক্রিয় সহায়তায় আলোচনাকে ধীরে ধীরে এগিয়ে নিয়ে যেতে হবে।

বোর্ডে এইভাবে লিখতে হবে—

$(1+2)^2 = 3^2 = 9 = 1^2 + 2.1.2 + 2^2$

$(2+3)^2 = 5^2 = 25 = 2^2 + 2.2.3 + 3^2$

$(3+4)^2=7^2=49=3^2+2.3.4+4^2$

$(4+5)^2=9^2=81=4^2+2.4.5+5^2$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$

প্রথম পর্যায়ের পদ্ধতি ঃ

* $(1+2)^2=$ কত ?
* 9 কে এখানে কিভাবে লেখা হল ?
* $(2+3)^2=$ কত ?
* 25 কে এখানে কিভাবে লেখা হয়েছে ?
* $(3+4)^3=$ কত ?
* 49 কে এখানে কিভাবে লেখা দেখছ ?
* $(4+5)^2=$ কত ?
* 81 কে এখানে কিভাবে লেখা হল ?
* ওপরের চারটি বর্গরাশিকে যেভাবে ভেঙ্গে লেখা হয়েছে সেটা দেখে এবার বল প্রথম পদটি a এবং দ্বিতীয় পদটি b হলে $(a+b)^2=$ কত লেখা যাবে ?

শিক্ষকের করণীয়

দ্বিতীয় পর্যায় ঃ সূত্রটির সত্যতা সম্বন্ধে যাতে ছাত্রদের মনে কোনরকম সন্দেহ না থাকে তারজন্য ছাত্রদের প্রত্যেককে ইচ্ছামত a ও b-এর একটি করে মান ধরে সূত্রটির বামপক্ষ ও ডানপক্ষ সমান কিনা পরীক্ষা করে দেখতে বলা হবে এবং প্রয়োজন হলে ছাত্রদের কাছে গিয়ে ব্যক্তিগতভাবে সাহায্য করতে হবে।

তৃতীয় পর্যায় ঃ পরীক্ষা শেষ হলে ছাত্রদের কয়েকটি দলে ভাগ করা হবে এবং প্রত্যেক দলকে কার্ডবোর্ডের তৈরী বর্গক্ষেত্র ও আয়তক্ষেত্রের একটি করে সেট দেওয়া হবে। এক একটি সেটে যে জিনিসগুলি থাকবে সেগুলি এইরকম—

a বাহুযুক্ত বর্গের ক্ষেত্রফল $=a^2$

b " " " $=b^2$

$(a+b)$ " " " $=(a+b)^2$

প্রত্যেকটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $=ab$

এবং ক্ষেত্রফল দুটির যোগফল $=2ab.$

শিক্ষকমহাশয় তারপর ছাত্রদের পর্যবেক্ষণ করতে বলবেন যে, a বর্গ, b বর্গ এবং ab ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট দুটী আয়তক্ষেত্রকে $(a+b)$-বর্গের ওপর রাখলে হুবহু মিলে যায় এবং এর থেকে লেখা যায় যে, $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

চতুর্থ পর্যায় : এরপর ব্ল্যাকবোর্ডে এই অংকগুলি দেওয়া হবে এবং ছাত্রদের করতে বলা হবে—

গুণ কর :—

(১) $(x+y)(x+y)$

(২) $(a+2b)(a+2b)$

এরপর ছাত্রদের সহায়তায় বোর্ডে গুণফলগুলি নিম্নরূপ সাজিয়ে লেখা হবে,

$(x+y)(x+y)=(x+y)^2=x^2+2xy+y^2=(x)^2+2(x)(y)+(y)^2$

আবার, $(a+2b)(a+2b)$

$=(a+2b)^2=a^2+4ab+4b^2$

$=(a)^2+2(a)(2b)+(2b)^2$

শিক্ষক মহাশয় ছাত্রদের বামপক্ষ এবং ডানপক্ষের সম্বন্ধ লক্ষ্য করতে বলবেন এবং তারপর নিম্নলিখিত সিদ্ধান্তে উপনীত হবেন,

(প্রথম পদ + দ্বিতীয় পদ $)^2$ = (প্রথম পদ $)^2$ + 2 (প্রথম পদ) × (দ্বিতীয় পদ) + (দ্বিতীয় পদ $)^2$

শিক্ষক মহাশয় ছাত্রদের সহায়তায় সূত্রানুযায়ী একটী অংক বোর্ডে করবেন :

$(3m+5n)^2$

$=(3m)^2+2(3m)(5n)+(5n)^2$

$=9m^2+30mn+25n^2$

অভিযোজন : ছাত্ররা আজকের পড়া ভালভাবে বুঝেছে কিনা তা পরীক্ষা করার জন্য এই কাজগুলি দেওয়া হবে এবং তারা পারছে কিনা তা লক্ষ্য রাখতে হবে—

(ক) **বর্গ নির্ণয় কর :**

(১) $p+q$ (২) $m+n$

(খ) **গুণ কর :**

(১) $(a+bc)(a+bc)$ (২) $(b+ca)(b+ca)$

গৃহ কাজ : (ক) যখন $a=10$ এবং $b=15$, তখন $(a+b)^2=$ কত ?

(খ) যখন $m=1$ এবং $n=3$ তখন $4m^2+12mn+9n^2$ এর মান কত ?

(গ) বর্গ নির্ণয় কর :—$2a+2b$.

শিক্ষক মহাশয় ছাত্রদের ওপরের অংকগুলি বাড়ী থেকে ক'রে আনতে বলবেন।

পাটীগণিত—3

বিদ্যালয়— বারাসাত কালীকৃষ্ণ বালিকা বিদ্যালয়।
শ্রেণী—সপ্তম
ছাত্রীসংখ্যা—40
গড় বয়স—12+
সময়—40 মিনিট
তারিখ—18.4.74
শিক্ষিকা—মধুমিতা চৌরাশী

বিষয়—পাটীগণিত
বিশেষ পাঠ—দশমিক ভগ্নাংশ।
অদ্যকার পাঠ—আবৃত্ত পৌনঃপুনিক দশমিক।

উদ্দেশ্য ঃ পৌনঃপুনিক দশমিক সম্বন্ধে ছাত্রীদের জ্ঞানলাভে সহায়তা করা এবং যুক্তি ও বিচারশক্তির বিকাশ সাধন করে পাটীগণিতে আগ্রহ সৃষ্টি করা।

উপকরণ ঃ শ্রেণীকক্ষের সাধারণ উপকরণসমূহ।

আয়োজন ঃ ছাত্রীদের পূর্বজ্ঞান পরীক্ষা ও আজকের পাঠে আগ্রহ সৃষ্টি করার জন্য এই প্রশ্নগুলি করা হবে।

(১) দশমিক ভগ্নাংশের একটি উদাহরণ দাও।
(২) ·42কে সাধারণ ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।
(৩) $\frac{7}{12}$-র তিন দশমিক অংক পর্যন্ত আসন্ন মান কত?

পাঠঘোষণা ঃ আজ আমরা আবৃত্ত বা পৌনঃপুনিক দশমিক সম্বন্ধে কিছু জানব।

উপস্থাপন ঃ

শিক্ষিকার করণীয়

প্রথম পর্যায় ঃ ছাত্রীদের সহায়তায় ধীরে ধীরে এভাবে বোর্ডের কাজ করা হবে। $\frac{3}{4}$কে ভাগের সাহায্যে দশমিকে প্রকাশ করা হবে।

```
4) 3·00 (·75
   28
   --
    20
    20
    --
```

এখানে $\frac{3}{4}$কে দশমিকে প্রকাশ করলে হল ·75 এবং কোন ভাগশেষ থাকল না।

অতএব $\frac{3}{4}$-এর দশমিক মান সসীম।

প্রথম পর্যায়ের পদ্ধতি

- $\frac{3}{4}$কে দশমিক ভগ্নাংশে পরিণত করাতে ভাগফল কত পাওয়া গেল?
- এখানে ভাগশেষ কি?
- $\frac{3}{4}$-এর দশমিক মানটি কি ধরণের?

শিক্ষিকার করণীয় :

দ্বিতীয় পর্যায় : $\frac{1}{7}$কে দশমিকে প্রকাশ করতে হবে।

```
7)10(·142857
  7
  30
  28
   20
   14
    60
    56
     40
     35
      50
      49
       1
```

এখানে সব সময়েই কিছু ভাগশেষ থাকছে।

অতএব $\frac{1}{7}$-র দশমিক মান অসীম।

দ্বিতীয় পর্যায়ের পদ্ধতি

- এখানে $\frac{1}{7}$কে দশমিক ভগ্নাংশে পরিণত করতে গিয়ে ভাগফল ও ভাগশেষে কি দেখা গেল ?
- $\frac{1}{7}$-র দশমিক মানটি কি ধরণের ?

শিক্ষিকার করণীয় :

তৃতীয় পর্যায় : এবার $\frac{1}{3}$কে দশমিক ভগ্নাংশে পরিণত করা যাক।

```
3)1·000...(·333......
   9
   10
    9
    10
     9
     1
```

$\therefore \ \frac{1}{3} = \cdot 333......$

এখানে প্রত্যেকবারই 1 ভাগশেষ থাকছে, সুতরাং বোঝা যাচ্ছে যে, ভাগ যতই প্রসারিত করা হোক না কেন, ভাগকার্য্যের কখনও শেষ হবে না। অতএব এটি অসীম দশমিক। তাছাড়া এর ভাগফল লক্ষ্য করলে দেখা যাবে যে, এর দশমিক অংশে পরপর কেবলই 3 আসছে অর্থাৎ 'ওটি' পুনঃপুনঃ আবৃত্ত হচ্ছে। সুতরাং এটি আবৃত্ত দশমিক।

তৃতীয় পর্যায়ের পদ্ধতি

- $\frac{1}{3}$কে দশমিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করতে গিয়ে ভাগফল কি দেখছ ?
- এই দশমিক মানটি কি ধরণের ?

- এখানে প্রতিক্ষেত্রে ভাগশেষ কত থাকছে ?
- তাহলে 3 সংখ্যাটি ভাগফলে কি ভাবে আসছে ?
- তাহলে এটি কি ধরণের দশমিক ?
- এখানে দশমিক অংশে কটি অংক পুনঃ পুনঃ আবৃত্ত হচ্ছে ?

শিক্ষিকার করণীয়

চতুর্থ পর্যায় ঃ এবার $\frac{3}{11}$কে দশমিকে প্রকাশ করা যাক।

```
11)3·00···(·2727
   22
   ---
    80
    77
    ---
     30
     22
     ---
      80
      77
      ---
       3
```

এখানে ভাগফলে দশমিকের পর প্রথমে 2 তারপর 7, আবার 2 তারপর 7 এইভাবে এগোচ্ছে। অতএব দেখা যাচ্ছে যে, এখানে দশমিক অংশে প্রথমে 2 তারপরে 7 এভাবে ভাগফলে অংকদুটির পুনরাবৃত্তি ঘটছে। সুতরাং এটিও একটি আবৃত্ত দশমিক।

ওপরের 3 ও 4নং উদাহরণ দুটির সাহায্যে আমরা বুঝতে পারি যে অসীম দশমিকের দশমিক অংশে এক বা একাধিক অংকের পুনঃপুনঃ আবৃত্তি হওয়ায় এরূপ দশমিককে বলা হয় পৌনঃপুনিক বা আবৃত্ত দশমিক।

আর সংক্ষেপে আবৃত্ত দশমিক লেখবার জন্য আবৃত্ত অংকটির মাথার ওপর একটি (·) বসাতে হয়। যদি আবৃত্ত অংশে একের অধিক অংক থাকে, তবে প্রথম ও শেষ অংকের মাথায় ঐরূপ বিন্দু বসাতে হয়। যেমন—

$\frac{1}{3} = \cdot333\cdots = \cdot\dot{3}$ এবং $\frac{3}{11} = \cdot2727\ldots = \cdot\dot{2}\dot{7}$

চতুর্থ পর্যায়ের পদ্ধতি

- $\frac{3}{11}$কে দশমিকে প্রকাশ করলে কোন্ কোন্ অংকের পুনরাবৃত্তি হচ্ছে ?
- এই দশমিকের কি নাম দেওয়া হবে ?
- এখানে দশমিক অংশে কটি অংক পুনঃ পুনঃ আবৃত্ত হচ্ছে ?
- আবৃত্ত দশমিক সংক্ষেপে লেখার নিয়ম কি ?

অভিযোজন ঃ আজকের পাঠ ছাত্ররা কতখানি আয়ত্ত করেছে, তা জানবার জন্য এ রকম প্রশ্ন করা হবে এবং প্রয়োজনবোধে ব্যক্তিগত সহায়তা করতে হবে ঃ

(১) আবৃত্ত বা পৌনঃপুনিক দশমিক বলতে কি বোঝ ?
(২) এ ধরণের দশমিকের মান সসীম না অসীম ?
(৩) আবৃত্ত দশমিককে সংক্ষেপে কিভাবে লেখা হয় ?
(৪) $5\frac{5}{7}$কে আবৃত্ত দশমিকে পরিণত কর।

বাড়ীর কাজ : ছেলেদের বাড়ী থেকে এগুলি করে আনতে বলা হবে।

আবৃত্ত দশমিকে প্রকাশ কর :—

(১) $\frac{5}{6}$ (২) $3\frac{1}{6}$ (৩) $1\frac{5}{18}$ (৪) $\frac{4}{48}$

পাঠটীকা—4

বিদ্যালয়—বারাসাত বালিকা বিদ্যালয়
শ্রেণী—অষ্টম
ছাত্রী সংখ্যা—40
গড় বয়স—13+
সময়—40 মিনিট
তারিখ—20.4.74
শিক্ষিকা—মায়া চ্যাটার্জী

বিষয়—জ্যামিতি
সাধারণ পাঠ—জ্যামিতিক উপপাদ্য।
বিশেষ পাঠ—ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি = 2 সমকোণ।
এর প্রমাণ। (অন্তকার পাঠ)।

উদ্দেশ্য : ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি দুসমকোণের সমান—এটি প্রমাণ করতে ছাত্রীদের সহায়তা করা এবং এর প্রয়োগের মাধ্যমে ছাত্রীদের যুক্তি, বিচার ও চিন্তাশক্তিকে উন্নত করা এবং সর্বোপরি জ্যামিতির প্রতি তাদের আগ্রহের সৃষ্টি করা।

উপকরণ : শ্রেণীকক্ষের সাধারণ উপকরণ ছাড়া ব্লাকবোর্ডের উপযোগী স্কেল ও কাঁটা-কম্পাস। এছাড়া শ্রেণীর প্রত্যেকটি ছাত্রীর জন্য একটি ক'রে কাগজের কাটা ত্রিভুজ। এই ত্রিভুজগুলি বিভিন্ন আকারের (সমবাহু, সমদ্বিবাহু, সমকোণী, সূক্ষ্মকোণী ইত্যাদি) এবং বিভিন্ন কোণের পরিমাপে কেটে নিতে হবে।

আয়োজন : পূর্বজ্ঞান পরীক্ষা করার জন্য এবং আজকের পাঠে ছাত্রীদের আগ্রহ সৃষ্টি করার জন্য এই প্রশ্নগুলি করা হবে—

(১) একান্তর কোণ ও অনুরূপ কোণ কাকে বলে ছবি এঁকে বুঝিয়ে দাও। (বোর্ডে ছাত্রীদের ডেকে এনে)

(২) একটি সরলরেখার ওপর আর একটি সরলরেখা দণ্ডায়মান হলে যে দুটি কোণ উৎপন্ন হয়, তাদের সমষ্টি কত হবে?

(৩) দু'সমকোণকে আর কি কোণ বলা হয়?

(৪) তোমার খাতায় একটি সমকোণী ত্রিভুজ এঁকে সমকোণ ছাড়া অন্য কোণ দুটির মান কত হবে চাঁদার সাহায্যে বল।

পাঠ ঘোষণা : আজ আমরা ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি দুসমকোণ—এই উপপাদ্যটি সম্বন্ধে জানব।

উপস্থাপন ঃ

শিক্ষিকার করণীয়

প্রথম পর্যায় : পরীক্ষাগার পদ্ধতির সাহায্যে ছাত্রীরা প্রথমে জ্ঞানলাভ করবে।

বিভিন্ন কোণের পরিমাপে কাটা কাগজের ত্রিভুজগুলি এবার ছাত্রদের মধ্যে বিতরণ করে দিতে হবে যাতে প্রতিটি ছাত্র একটি ক'রে ত্রিভুজ পায়।

প্রতিটি ছাত্রকে নির্দেশ দিতে হবে যে, ত্রিভুজের তিনটি কোণকে তারা যেন A, B, C নাম দিয়ে চিহ্নিত করে এবং চাঁদার সাহায্যে কোণ তিনটির পরিমাপ ক'রে সমষ্টি নির্ণয় করে।

এবার প্রত্যেকটি ছাত্রকেই সমষ্টি কত হল জিজ্ঞাসা করা হবে। এর উত্তরে প্রত্যেকেই বলবে 180° বা দু সমকোণ। যার ভুল হবে, তাকে ব্যক্তিগত ভাবে সাহায্য করতে হবে।

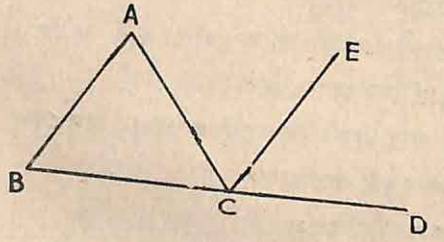
এই পরীক্ষার ফলে ছাত্রীদের মনে আর কোন রকম সন্দেহই থাকবে না যে, যে-কোন ত্রিভুজের ক্ষেত্রে তিনটি কোণের সমষ্টি দু সমকোণের সমান।

প্রথম পর্যায়ের পদ্ধতি :

- (১ম ছাত্রীকে) ত্রিভুজের তিনটি কোণের যোগফল কত হল ?
- (২য় ছাত্রীকে) ঐ
- এইভাবে বেশীর ভাগ ছাত্রীকে প্রশ্ন করতে হবে।

শিক্ষিকার করণীয়

দ্বিতীয় পর্যায় : বিশ্লেষণী পদ্ধতিতে উপপাদ্যটিকে এইভাবে প্রমাণ করা হবে :—



ABC একটি ত্রিভুজ। প্রমাণ করতে হবে যে,

$$\angle A + \angle B + \angle C = 2$$

সমকোণ।

প্রমাণ। C কোণকে ঠিক রেখে A ও B কোণকে C এর পাশে এনে সরল কোণ উৎপন্ন করার জন্য BC কে D পর্যন্ত বাড়ানো হল। তাহলে এটা প্রমাণ করলেই যথেষ্ট হবে যে,

$$\angle A + \angle B + \angle C = \angle C + \angle ACD.$$

অথবা, $\angle A + \angle B = \angle ACD.$

এখন $\angle ACD$ থেকে $\angle A$-র সমান ক'রে $\angle ACE$ কেটে নেওয়া হল। এবার যদি প্রমাণ করা যায় যে, $\angle B = \angle ECD$, তাহলে $\angle A + \angle B = \angle ACD$ প্রমাণ করা সহজ হবে।

কিন্তু অংকন অনুসারে, $\angle A =$ একান্তর $\angle ACE$

$\therefore$ $AB \parallel CE$ আবার $\angle B =$ অনুরূপ $\angle ECD$

কারণ $AB \parallel CE$ এবং BCD ছেদক।

$\therefore$ দেখতে পাচ্ছি যে, $\angle A + \angle B = \angle ACE + \angle ECD$

$= \angle ACD.$

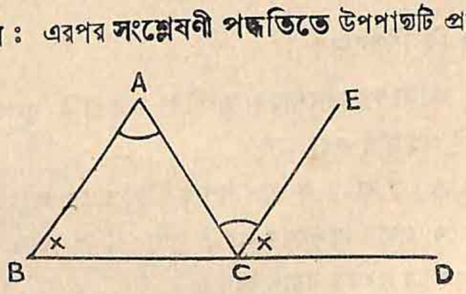
এবং এর থেকেই উপাপাদ্যটি প্রমাণ করা হয়।

দ্বিতীয় পর্য্যায়ের পদ্ধতি ঃ

- এখানে কি দেওয়া আছে?
- কি প্রমাণ করতে হবে?
- কি ভাবে $\angle A + \angle B + \angle C = 2$ সমকোণ প্রমাণ করা যাবে?
- BC কে D পর্যন্ত বাড়ানো হল কেন?
- কি ভাবে প্রমাণ করা যাবে যে,
  $\angle A + \angle B = \angle ACD$?
- $AB \parallel CE$ কেন?
- $\angle B = \angle ECD$ কেন?
- তাহলে $\angle A + \angle B =$ কত?
- অতএব কি প্রমাণ হল?

শিক্ষিকার করণীয়

তৃতীয় পর্যায় ঃ এরপর **সংশ্লেষণী পদ্ধতিতে** উপপাদ্যটি প্রমাণ করতে হবে।



ABC একটি ত্রিভুজ।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 2$ সমকোণ।

অংকন। BC বাহুকে D পর্যন্ত বাড়ানো হল এবং C বিন্দু থেকে CE সরলরেখা BA বাহুর সমান্তরাল ক'রে টানা হল।

প্রমাণ। যেহেতু BA ∥ CE এবং AC এদের ছেদক,

$\therefore$ ∠CAB = একান্তর ∠ACE,

আবার $\because$ BA ∥ CE এবং BCD ছেদক,

$\therefore$ ∠ABC = অনুরূপ ∠ECD.

$\therefore$ ∠CAB + ∠ABC = ∠ACE + ∠ECD = ∠ACD.

এই দুই সমান বস্তুতে ∠BCA যোগ করলে ∠CAB + ∠ABC + ∠BCA

= ∠ACD + ∠BCA = 2 সমকোণ।

$\therefore$ ∠ABC + ∠BCA + ∠CAB = 2 সমকোণ।

তৃতীয় পর্যায়ের পদ্ধতি ঃ

- ABC কি ?
- কি প্রমাণ করতে হবে ?
- কি অংকন প্রয়োজন ?
- ∠CAB ও ∠ACE এর মধ্যে সম্পর্ক কি ?
- কেন এই দুটি কোণ সমান ?
- ∠ABC ও ∠ECD-র মধ্যে সম্পর্ক কি ?
- কেন এই কোণ দুটি সমান ?
- ∠CAB + ∠ABC = কত লেখা যেতে পারে ?
- এখন এই দুই সমান বস্তুতে কি যোগ করলে আমাদের উপপাদ্যটি প্রমাণিত হয় ?
- অতএব আজ কি শিখলাম ?

অভিযোজন ঃ আজকের আলোচনা ছাত্রীরা কতখানি বুঝতে পেরেছে তা পরীক্ষা করার জন্য এই প্রশ্নগুলি করা হবে।

(১) BA এবং CA কে বর্ধিত ক'রে উপপাদ্যটি কিভাবে প্রমাণ করবে ?

(২) প্রমাণ কর যে, কোন ত্রিভুজের একটি বাহু বর্ধিত হলে বহিঃস্থ কোণটি অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান হবে।

(৩) একটি ত্রিভুজের দুটি কোণ যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের দুটি কোণের সঙ্গে পরস্পর সমান হলে, উভয়ের তৃতীয় কোণ দুটির সম্পর্ক কি রকম হবে ?

বাড়ীর কাজ ঃ উপপাদ্যটির বিশ্লেষণী ও সংশ্লেষণী প্রমাণ দুটি ছাত্রীদের ভালভাবে তৈরী ক'রে আসতে ও লিখে আনতে বলা হবে।

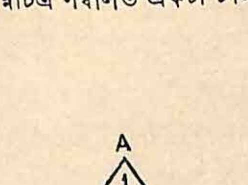
পাঠ-টীকা—5

বিদ্যালয়—রমেশমিত্র বালিকা বিদ্যালয়
শ্রেণী—অষ্টম
ছাত্রী সংখ্যা—40
গড় বয়স—13+
সময়—40 মিনিট
তারিখ—28.4.74
শিক্ষিকা—শ্যামলী পাল

বিষয়—জ্যামিতি
সাধারণ পাঠ—জ্যামিতিক উপপাদ্য
বিশেষ পাঠঃ—n-সংখ্যক বাহু বিশিষ্ট কুব্জ বহুভুজের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি (2n–4) সমকোণ—এই উপপাদ্যটির প্রমাণ।
অদ্যকার পাঠ ঃ—ঐ

উদ্দেশ্য ঃ উল্লিখিত উপপাদ্যটি প্রমাণ করতে ছাত্রীদের সহায়তা করা এবং যুক্তি ও চিন্তাশক্তির বিকাশ সাধন করা।

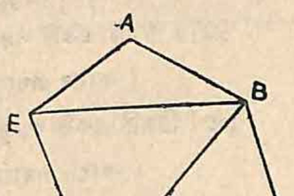
উপকরণ ঃ সাধারণ উপকরণ সমূহ ছাড়া ব্ল্যাকবোর্ডের উপযোগী স্কেল এবং নিম্নচিত্র সম্বলিত একটী চার্ট।



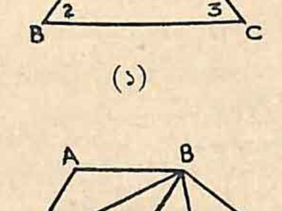
(১)



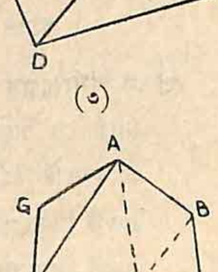
(২)



(৩)



(৪)



(৫)

আয়োজন ঃ আজকের পাঠের প্রতি ছাত্রীদের মন আকর্ষণ করার জন্য পূর্বজ্ঞানের ভিত্তিতে এই রকম প্রশ্ন করা হবে।

(১) ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি কত ?

(২) একটি কৌণিক বিন্দু থেকে পঞ্চভুজকে কটি ত্রিভুজে বিভক্ত করা যায় ?

(৩) একটি ষড়ভুজের অন্তঃকোণ কটী ?

পাঠ ঘোষণা : n-সংখ্যক বাহু বিশিষ্ট কুব্জ-বহুভুজের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি কত তা আজ আমরা নির্ণয় করব।

উপস্থাপন :

শিক্ষিকার করণীয়

প্রথম পর্য্যায় : চার্টের চিত্রগুলি পরপর দেখাতে হবে। প্রতিটি ক্ষেত্রেই একটী কৌণিক বিন্দু থেকে অঙ্কিত সরলরেখার দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের পরিপ্রেক্ষিতে নিম্ন উপায়ে **আরোহী প্রণালীতে** পাঠ ধীরে ধীরে এগোবে।

প্রথম চিত্রটি একটি ত্রিভুজের, যার কোণ সমষ্টি = 2 সমকোণ।

দ্বিতীয় চিত্রটি একটি চতুর্ভুজের, যার কোণ সমষ্টি = 4 ”

(কারণ ত্রিভুজের সংখ্যা = 2)

তৃতীয় চিত্রটি একটি পঞ্চভুজের, যার কোণ সমষ্টি = 6 ”

(কারণ এখানে ত্রিভুজের সংখ্যা = 3)

চতুর্থ চিত্রটি একটি ষড়ভুজের যার কোণ সমষ্টি = 8 ”

(কারণ এখানে ত্রিভুজের সংখ্যা = 4)

পঞ্চম চিত্রটি একটি সপ্তভুজের যার কোণ সমষ্টি = 10 ”

(কারণ এখানে ত্রিভুজের সংখ্যা = 5)

প্রথম পর্য্যায়ের পদ্ধতি :

- চার্টে যে চিত্রগুলি আঁকা আছে পরপর তাদের নাম বল।
- প্রত্যেকটি চিত্রে কটি ক'রে ত্রিভুজ আছে পরপর বলে যাও।
- একটি ত্রিভুজের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি কত ?
- একটি ত্রিভুজের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি যদি 2 সমকোণ হয়, তবে ২য়, ৩য় ইত্যাদি চিত্রগুলিতে কটি ক'রে ত্রিভুজ আছে হিসেব ক'রে অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি পরপর বলে যাও।
- ১ম, ২য় ইত্যাদি চিত্রগুলির অন্তঃকোণ সমষ্টিকে $\triangle$-র সংখ্যা দিয়ে কিভাবে লেখা যাবে ?
- চিত্রগুলির অন্তঃকোণ সমষ্টিকে বাহুর সংখ্যা দিয়ে কিভাবে প্রকাশ করা যাবে ?

শিক্ষিকার করণীয় :

দ্বিতীয় পর্যায় : এই ব্যাপারটীকে এরপর তালিকাকারে নীচের মত সাজাতে হবে। এ সময়ে ছাত্রীরা সক্রিয়ভাবে পাঠে অংশ নেবে।

পর্য্যবেক্ষণ সংখ্যা	বাহুর সংখ্যা	ক্ষেত্রটির নাম	মোট ত্রিভুজের সংখ্যা	মোট সমকোণ	মোট সমকোণ $=2\times\triangle$-র সংধ্যা	অন্তঃকোণ-গুলির সমষ্টি $=2\times$(বাহুর সংখ্যা -2) সমকোণ।
1	3	ত্রিভুজ	1	$2=$	2×1 সমকোণ	$=2\times(3-2)$ সমকোণ
2	4	চতুর্ভুজ	2	$4=$	2×2 ,,	$=2\times(4-2)$,,
3	5	পঞ্চভুজ	3	$6=$	2×3 ,,	$=2\times(5-2)$,,
4	6	ষড়ভুজ	4	$8=$	1×4 ,,	$=2\times(6-2)$,,
5	7	সপ্তভুজ	5	$10=$	2×5 ,,	$=2\times(7-2)$,,

দ্বিতীয় পর্যায়ের পদ্ধতি :

- কোন বহুভুজের বাহুর সংখ্যা 8 হলে অন্তঃকোণগুলির সমষ্টিকে বাহুর সংখ্যা দিয়ে প্রকাশ করলে কত হবে ?
- কোন বহুভুজের বাহুর সংখ্যা 10 হলে অন্তঃকোণগুলির সমষ্টিকে বাহুর সংখ্যার সাহায্যে প্রকাশ কর।
- বহুভুজের বাহুর সংখ্যা আর অন্তঃকোণগুলির সমষ্টির মধ্যে কি সম্পর্ক পাওয়া যাচ্ছে ?
- যে বহুভুজের বাহুর সংখ্যা হবে n, তার অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি কত হবে ?
- অতএব আমরা আজ কি শিখলাম ?

শিক্ষিকার করণীয় :

তৃতীয় পর্যায় : ওপরের তালিকার ২য় এবং শেষ স্তম্ভ দুটী থেকে আমরা দেখতে পাচ্ছি যে, অষ্টভুজের ক্ষেত্রে বাহুর সংখ্যা $=8$ এবং সেক্ষেত্রে মোট অন্তঃ-কোণগুলির সমষ্টি হবে $2(8-2)$ সমকোণ বা 12 সমকোণ।

বাহুর সংখ্যা ও অন্তঃকোণগুলির সমষ্টির মধ্যে এই সম্পর্ক থেকে আমরা লিখতে

পারি যে, n বাহুবিশিষ্ট যে-কোন বহুভুজের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি $=2(n-2)$ সমকোণ বা $(2n-4)$ সমকোণ।

চতুর্থ পর্যায় : এরপর অবরোহী প্রণালীতে প্রমাণটি ছাত্রীদের দেখাতে হবে।

[এই প্রমাণ যে কোন জ্যামিতি বই থেকে দেখে নিতে হবে]

অভিযোজন : নবলব্ধ জ্ঞান ছাত্রীরা কতটা অর্জন করতে পেরেছে তা জানবার জন্য এই প্রশ্নগুলি করা হবে।

(১) একটী কৌণিক বিন্দু থেকে একটি দশভুজকে কটি ত্রিভুজে বিভক্ত করা যায়?

(২) 15 বাহুবিশিষ্ট বহুভুজের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি কত?

(৩) একটি বহুভুজের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি 36 সমকোণ হলে বাহু সংখ্যা কত?

(৪) $3m$-বাহুবিশিষ্ট একটী বহুভুজের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি কত?

বাড়ীর কাজ : উপপাদ্যটীর আরোহী ও অবরোহী প্রমাণ দুটী ছাত্রীদের লিখে আনতে বলা হবে।

পাঠটীকা নং—6

বিদ্যালয়—মধ্যম গ্রাম উচ্চ বিদ্যালয়
শ্রেণী—অষ্টম
ছাত্রসংখ্যা—40
গড় বয়স—13 +
সময় : 40 মিনিট
তারিখ—15.4.74
শিক্ষক ; সরোজ পাল

বিষয়—পাটীগণিত
বিশেষ পাঠ—শতকরা হিসাব।
অদ্যকার পাঠ : ঐ

উদ্দেশ্য : শতকরা হিসাব সংক্রান্ত সরল সমাধান করতে শিক্ষার্থীদের উদ্বুদ্ধ করা এবং পাটীগণিতের প্রতি তাদের আগ্রহের সৃষ্টি করা।

উপকরণ : শ্রেণীকক্ষের সাধারণ উপকরণ।

আয়োজন : আজকের পাঠে ছাত্রদের আগ্রহী করার জন্য এই ধরণের প্রশ্ন করা হবে : [পূর্বজ্ঞান : ঐকিক নিয়ম]

(১) একটি বিস্কুটের দাম 5 পয়সা হলে 100টি বিস্কুটের দাম কত?

(২) 1 টাকার 1 বছরের সুদ 10 পয়সা হলে 100 টাকার 1 বছরের সুদ কত?

(৩) কোন পরীক্ষায় 50 জন ছাত্রের মধ্যে 20 জন পাশ করল।

∴ 100 জন ছাত্রের মধ্যে কতজন পাশ করেছে?

পাঠ ঘোষণা : আজ আমরা শতকরা হিসাব সংক্রান্ত কয়েকটি সহজ সমস্যার সমাধান করব।

উপস্থাপন :—

শিক্ষকের বক্তব্য :

উদাহরণ 1. মনে কর তোমার কাছে 10 টাকা ছিল। তুমি তার থেকে 3 টাকা খরচ করেছ। তাহলে বলা যায় যে, তোমার টাকার $\frac{3}{10}$ অংশ তুমি খরচ করেছ। $\frac{3}{10}$ এই ভগ্নাংশটির হরকে যদি 100-তে পরিণত করা যায়, তবে হবে $\frac{30}{100}$; ভগ্নাংশের আলোচনায় তোমরা শিখেছ $\frac{30}{100}$ বলতে 100 ভাগের মধ্যে 30 ভাগ বোঝায়। এখন $\frac{30}{100}$ ও $\frac{3}{10}$ একই ভগ্নাংশ। সুতরাং বোঝা গেল যে, 10-এর 3 বলতে যা বোঝাবে, 100-র মধ্যে 30 বলতেও তাই বোঝাবে।

পদ্ধতি :

- তোমার কাছে কত টাকা ছিল ?
- তুমি কত টাকা খরচা করেছ ?
- তাহলে তোমার টাকার কত অংশ খরচা করেছ ?
- ঐ ভগ্নাংশের হরটি কত ?
- ঐ হরটিকে 100 তে পরিণত করলে ভগ্নাংশটি কত হয় ?
- $\frac{30}{100}$ এবং $\frac{3}{10}$ এর মধ্যে সম্বন্ধ কি ?

শিক্ষকের বক্তব্য :

এই রকম একশ'র ওপর যে হিসাব করা হয়। তাকে শতকরা হিসাব বলে।

শতকরা কথাটির সাহায্যে প্রতি শতে অর্থাৎ প্রত্যেক 100তে বোঝায়।

এখানে অবশ্য তুমি প্রকৃতপক্ষে 30 টাকা খরচ কর নি। মাত্র 3 টাকা খরচ করেছ। কিন্তু প্রতি 10 টাকাতে 3 টাকা খরচ করলেই 100 টাকাতে 30 টাকাই খরচ হবে। এটাকে আমরা অন্যভাবে বোঝাতে পারি। যেমন—

10 টাকায় খরচা হয়েছে 3 টাকা—
∴ 1 " " " $\frac{3}{10}$ "
∴ 100 " " " $\frac{3}{10} \times 100 = 30$ টাকা।

∴ দেখতে পাচ্ছি যে, $\frac{3}{10}$ অংশও যা, শতকরা 30-ও তাই। সুতরাং **কোন ভগ্নাংশকে 100 দিয়ে গুণ করলেই শতকরা হিসাব পাওয়া যায়।**

পদ্ধতি :

- শতকরা হিসাব বলতে কি বোঝায় ?
- 10 টাকায় 3 টাকা খরচা হলে 1 টাকায় কত খরচা হবে ?
- ∴ 100 টাকায় কত খরচা হয়েছে ?
- তাহলে কোন ভগ্নাংশকে শতকরা হিসাবে পরিণত করতে হলে কি করতে হবে ?

শিক্ষকের বক্তব্য :

উদাহরণ : 2. আবার দেখ যদি বলা হয় যে, শতকরা 40 জন বালক পরীক্ষায় উত্তীর্ণ হয়েছে, তবে বুঝায় যে, প্রত্যেক 100 জনের মধ্যে 40 অর্থাৎ বালকগুলির 100 ভাগের 40 ভাগ বা $\frac{40}{100}$ উত্তীর্ণ হয়েছে। এ থেকে জানা গেল যে, **শতকরা কত বলা থাকলে তাকে 100 দিয়ে ভাগ করলে সেটা ভগ্নাংশে পরিণত হয়।**

শতকরা বোঝাবার জন্য % এই সাংকেতিক চিহ্নটি ব্যবহার করা হয়। সুতরাং 30%-এর অর্থ শতকরা 30.

পদ্ধতি :

- যদি বলা হয় কোন পরীক্ষায় শতকরা 40 জন বালক উত্তীর্ণ হয়েছে, তবে কি বোঝাবে ?
- তাহলে 100 ভাগের মধ্যে কতভাগ উত্তীর্ণ হয়েছে ?
- তাহলে শতকরা কত বলা থাকলে সেটাকে ভগ্নাংশে পরিণত করতে হ'লে কি করতে হবে ?
- শতকরা হিসাব বোঝাবার জন্য কি সাংকেতিক চিহ্ন ব্যবহার করা হয় ?
- শতকরা 30 কে সাংকেতিক চিহ্নের সাহায্যে কিভাবে লেখা হবে ?

অভিযোজন : আজকের পাঠ ছাত্ররা কতখানি বুঝেছে, তা জানবার জন্য এই ধরণের প্রশ্ন করা হবে এবং প্রযোজন ব্যক্তিগত সাহায্য করতে হবে : (১) শতকরা হিসাব বলতে কি বোঝ ? (২) কোন ভগ্নাংশকে কিভাবে শতকরা হিসাবে পরিণত করা হয় ? (৩) শতকরা হিসাব থেকে কিভাবে ভগ্নাংশে পরিণত করতে হয় ? (৪) 500 টাকার $12\frac{1}{2}\%$ = কত ?

বাড়ীর কাজ : (১) 55% কে ভগ্নাংশে পরিণত কর।

(২) কোন দুর্গে 5400 সৈন্য ছিল। উহাদের শতকরা $7\frac{1}{2}$ জন মারা গেল, মোট কত সৈন্য মারা গেল ?

শিক্ষক মহাশয় ছাত্রদের বাড়ী থেকে ওপরের অংকগুলি ক'রে আন্‌তে বলবেন।

(৩) কোন ব্যক্তি 9000 টাকা ধার দিয়ে এক বছরে 750 টাকা স্থদ পেল। শতকরা স্থদের হার কত?

শিক্ষকমহাশয় উপরোক্ত অঙ্কগুলি ছাত্রদের বাড়ী থেকে করে আনতে বলবেন।

পাঠটীকা—7

বিত্যালয়—কালীকৃষ্ণ গার্লস্ হাইস্কুল
শ্রেণী—অষ্টম (ক)
ছাত্রীসংখ্যা—৪০
গড় বয়স—১৩ +
সময়—৪০ মিনিট
শিক্ষিকা—তাপসী ঘোষ
তারিখ—১১।৭।৭৪

বিষয়—পাটীগণিত
সাধারণ পাঠ—ক্ষেত্রফল নির্ণয়
বিশেষ পাঠ—আয়ত ক্ষেত্রের ক্ষেত্র-পরিমাণ নির্ণয়
অত্যকার পাঠ—ঐ

উদ্দেশ্য : ব্যবহারিক ক্ষেত্রে আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের স্থত্র আবিষ্কার ও প্রয়োগের মাধ্যমে ছাত্রীদের বিচার, পর্য্যবেক্ষণ ও বিশ্লেষণী শক্তির বিকাশ সাধনে সহায়তা করা।

উপকরণ : চার্টে অঙ্কিত একটি আয়ত ক্ষেত্র ও একটী বর্গক্ষেত্র, একটি বড় আয়তক্ষেত্র, কতকগুলি ছোট ছোট বর্গ একক এবং শ্রেণী কক্ষের সাধারণ উপকরণ সমূহ।

আয়োজন : ছাত্রীদের কৌতুহল ও আগ্রহ জাগ্রত করে পাঠ্যাভিমুখী করবার জন্য পূর্বজ্ঞানের ভিত্তিতে শিক্ষিকা নিম্নরূপ প্রশ্ন করবেন :

(১) $x \times x =$ কত? নির্ণেয় গুণফলটিকে x এর কি বলা যায়?

(২) মিটার × মিটার = ? নির্ণেয় গুণফলটিকে কি বলা যেতে পারে?

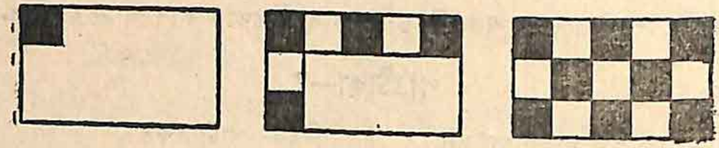
(৩) শ্রেণীর ব্ল্যাকবোর্ডটি কি ধরণের ক্ষেত্র?

(৪) ব্ল্যাকবোর্ডটি যে জায়গা জুড়ে আছে তাকে ব্ল্যাকবোর্ডের কি বলা হয়?

পাঠঘোষণা : 'আজ আমরা আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রপরিমাণ নির্ণয় করতে শিখব'—এই বলে শিক্ষিকা শ্রেণীতে আজকের পাঠ ঘোষণা করবেন।

উপস্থাপন : শিক্ষিকা চার্টে অঙ্কিত একটি আয়তক্ষেত্র এবং একটি বর্গক্ষেত্র দেখাবেন, যেখানে আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য 5 মি. এবং প্রস্থ 3 মি.; বর্গক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য 1 মি., প্রস্থ 1 মি. হবে। এর পর শিক্ষিকা নিম্নলিখিত উপায়ে প্রশ্নোত্তরের মাধ্যমে চিত্রের ও উপকরণের সহায়তায় আজকের পাঠদান কার্য্যে অগ্রসর হবেন।

শিক্ষিকার করণীয় : [নিম্নের চার্টটী শ্রেণীকক্ষের দেওয়ালে টাঙ্গাবেন]



১ ২ ৩

প্রশ্নাবলী :

(১) চার্টে অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের আয়তন অনুযায়ী আয়তক্ষেত্রটিকে বিভক্ত করতে হ'লে, আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের দিকে কি কি ভাগে বিভক্ত করতে হবে? (ছোট বর্গের একটি, দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের সংযোগ স্থলে বসিয়ে।)

(২) আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্যের প্রথম ভাগ ও তৎসংলগ্ন প্রস্থের প্রথম ভাগে ঐ রকম কতগুলি বর্গক্ষেত্র বসানো যাবে ? (অবশিষ্ট বর্গগুলির কতকগুলি দৈর্ঘ্যের ও প্রস্থের দিকে বসিয়ে।)

(৩) উপরোক্ত উপায়ে সম্পূর্ণ আয়তক্ষেত্রটির মধ্যে কয়টি বর্গক্ষেত্র বসান যাবে ? (অবশিষ্ট বর্গগুলি বসিয়ে)

(৪) এই 15 টি বর্গক্ষেত্র যে স্থান জুড়ে আছে তার সঙ্গে আয়তক্ষেত্রের আয়তনের সম্পর্ক কি ?

(৫) আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 5 মি. ও প্রস্থ 3 মি. এর মধ্যে কি সম্পর্ক স্থাপন করলে 15 পাওয়া যায় ?

(৬) মিটার × মিটার = কত ?

(৭) তাহলে, 5 মি. × 3 মি. = কত ?

(৮) তাহ'লে আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সূত্র সম্পর্কে আমরা কি সিদ্ধান্তে আসতে পারি ?

শিক্ষিকার করণীয়

শিক্ষিকা আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সূত্রটি নিম্নলিখিত উপায়ে বোর্ডে লিখবেন এবং ছাত্রীদের লিখে নিতে বলবেন। ঐ সূত্র থেকে প্রশ্নোত্তরের মাধ্যমে নিম্নের অবশিষ্ট সূত্রগুলিও আবিষ্কারের চেষ্টা করবেন।

(১) আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ

(২) $\dfrac{\text{আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল}}{\text{দৈর্ঘ্য}} = \dfrac{\text{দৈর্ঘ্য} \times \text{প্রস্থ}}{\text{দৈর্ঘ্য}} = \text{প্রস্থ}$

(৩) $\dfrac{\text{আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল}}{\text{প্রস্থ}} = \dfrac{\text{দৈর্ঘ্য} \times \text{প্রস্থ}}{\text{প্রস্থ}} = \text{দৈর্ঘ্য}$

অতঃপর শিক্ষিকা নিম্নলিখিত অঙ্কটি বোর্ডে লিখবেন এবং ছাত্রীদের সহযোগিতায় সমাধান করতে চেষ্টা করবেন।

সমস্যা ॥

একটি ঘরের মেঝের দৈর্ঘ্য 5 মি. 3 সেমি. ও প্রস্থ 3 মি. 6 ডেসিমি.। মেঝের ক্ষেত্রফল কত ?

সমাধান

মেঝের দৈর্ঘ্য = 5 মি. 3 সেমি. = 5·03 মি.

" প্রস্থ = 3 মি. 6 ডেসি. মি. = 3·6 মি.

মেঝের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ

= 5·03 মি. × 3·6. মি.

= (5·03 × 3·6) ব. মিটার = 18·108 ব: মি.

অভিযোজন : ছাত্রীরা বিষয়টি কতখানি বুঝল তা জানবার জন্য শিক্ষিকা নিম্নলিখিত সমস্যার সমাধান করতে দেবেন এবং প্রয়োজনবোধে ব্যক্তিগত সহায়তা করবেন।

(১) একটি ঘরের প্রস্থ 14 মি. ও ক্ষেত্রফল 280 ব. মি. হ'লে ঘরের মেঝের দৈর্ঘ্য কত ?

(২) একটি আয়তাকার মাঠের দৈর্ঘ্য 18 মিটার, প্রস্থ 12 মিটার। প্রতি বর্গ মিটারে 0·40 টাকা হিসাবে সম্পূর্ণ মাঠের ঘাস কাটতে কত খরচ হবে ?

(৩) একটি টেবিলের দৈর্ঘ্য 2 মি. 5 ডেসি. মি. এবং ক্ষেত্রফল 5 বর্গমিটার হ'লে, টেবিলটির প্রস্থ কত ?

গৃহ কাজ : শিক্ষিকা নিম্নের সমস্যাগুলির সমাধান ছাত্রীদের বাড়ী থেকে করে আনতে বলবেন।

(১) একটি ঘরের মেঝের দৈর্ঘ্য 22 মিটার, প্রস্থ 12 মিটার। মেঝেটি 1 বর্গ মিটার ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট টালি দিয়ে ঢাকতে কত গুলি টালি লাগবে ?

(২) 25 সে.মি. প্রস্থ এবং 32 সে.মি. দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট মোট 15 টি টালির সাহায্যে একটি আয়তক্ষেত্রকে আবৃত করা যায়। আয়ত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত? দৈর্ঘ্যের দিকে যদি 5টি করে টালি বসে, ঐ ক্ষেত্রের প্রস্থ কত হবে?

পাঠটীকা—8

বিদ্যালয়—কালী-কৃষ্ণ গার্লস হাইস্কুল
শ্রেণী—অষ্টম
গড় বয়স—১৩+
সময়—৪০ মিনিট
শিক্ষিকা—ইন্দ্রাণী সরকার
তারিখ—১১. ৭. ৭৪.

বিষয়—জ্যামিতি
সাধারণ পাঠ—জ্যামিতিক সত্যতার প্রমাণ সমূহ
অদ্যকার পাঠ—"ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহু একযোগে তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর"—প্রমাণ

উদ্দেশ্য—"ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহু একযোগে তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর"—এই তথ্যটি প্রমাণ করতেও ছাত্রীদের জ্যামিতিক তথ্য প্রমাণে আগ্রহ সৃষ্টি করে তাদের চিন্তাশক্তি, যুক্তিশক্তি, ও বিচার ক্ষমতার উৎকর্ষ সাধনে সহায়তা করা।

উপকরণ—শ্রেণী-কক্ষের সাধারণ উপকরণ ও জ্যামিতিক যন্ত্রপাতি।

আয়োজন : শিক্ষিকা ছাত্রীদের অদ্যকার পাঠে আগ্রহী করার জন্য তাদের পূর্বজ্ঞানের ভিত্তিতে নিম্নলিখিত সমস্যাগুলি সমাধান করতে দেবেন।

১। ABC ত্রিভুজে $AB = AC$, তাহলে $\angle ACB$ ও $\angle ABC$-র মধ্যে সম্পর্ক কি?

[বোর্ডে চিত্র অঙ্কন ক'রে]

২। XYZ ত্রিভুজে $\angle XYZ > \angle XZY$, তাহলে XZ ও XY বাহুদ্বয়ের মধ্যে সম্পর্ক কি?

[বোর্ডে চিত্র অঙ্কন ক'রে]

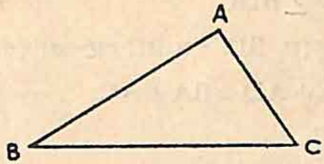
৩। একটি ত্রিভুজের ক'টা বাহু?

পাঠঘোষণা—আজ আমরা "ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহু একযোগে তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর"—এই তথ্যটি প্রমাণ করব।

উপস্থাপন : শিক্ষিকা প্রথমে বোর্ডে একটি বিষম বাহু ত্রিভুজ আঁকবেন এবং এবং অদ্যকার পাঠটি বিশ্লেষণী পদ্ধতিতে ছাত্রীদের সহায়তায় প্রশ্নোত্তরের মাধ্যমে উপস্থাপন করার চেষ্টা করবেন।

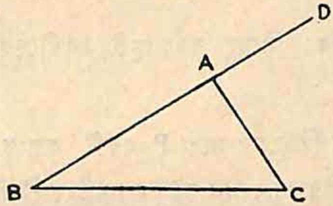
শিক্ষিকার প্রশ্ন ঃ

১। প্রদত্ত ABC ত্রিভুজে কি প্রমাণ করতে হবে ?



২। ধর AB কিংবা AC অপেক্ষা BC বৃহত্তর, তাহলে ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহু কোনটি ?

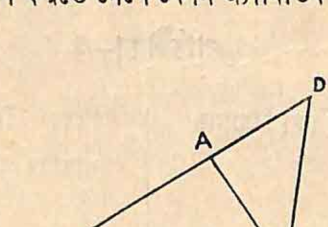
৩। যদি AB+AC, BC অপেক্ষা বৃহত্তর প্রমাণ করতে হয় ; তাহলে AB+AC কে কয়টি সরলরেখায় পরিণত করতে হবে ?



৪। AB+AC কে একটি সরলরেখায় কি ভাবে পরিণত করবে ?

৫। এখন BD বাহু ও BC বাহুর মধ্যে কি সম্পর্ক স্থাপন করতে হবে ?

৬। $BD > BC$ প্রমাণ করতে গেলে কোন জ্যামিতিক সত্যতার আশ্রয় নিতে হবে ?



৭। 'C' বিন্দুতে BD বাহুর সম্মুখীন কোণ কি ভাবে সৃষ্টি করবে ?

এবারে শিক্ষিকা উপরোক্ত প্রমাণটি সংশ্লেষণ পদ্ধতিতে ছাত্রীদের সহায়তায় প্রশ্নোত্তরের মাধ্যমে উপস্থাপন করবেন।

প্রমাণ :—ADC ত্রিভুজে, $AD = AC$;

$\therefore \angle ACD = \angle ADC.$

কিন্তু, $\angle BCD > \angle ACD$;

$\therefore$ $\angle BCD > \angle ADC$;

অর্থাৎ, $\angle BCD > \angle BDC$

অতএব, BDC ত্রিভুজে, BD বাহু BC অপেক্ষা বৃহত্তর।

কিন্তু, $BD = BA + AD = BA + AC$,

$\because$ $AD = AC$.

$\therefore$ BA এবং AC একত্রে $> BC$

অভিযোজন : ছাত্রীদের নবলব্ধ জ্ঞান পরীক্ষার্থে শিক্ষিকা নিম্নলিখিত সমস্যাটি সমাধান করতে দেবেন ও প্রয়োজনবোধে ব্যক্তিগত সহায়তা করবেন।

১। প্রমাণ কর—"একটি ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর অন্তর তৃতীয় বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।"

গৃহকাজ ঃ শিক্ষিকা নিম্নের সমস্যাদুটি ছাত্রীদের বাড়ী থেকে সমাধান করে আনতে বলবেন।

১। ABC সমবাহু ত্রিভুজের মধ্যে P একটি অন্তঃস্থ বিন্দু, প্রমাণ কর, PA, PB, PC, সরলরেখাগুলির যে কোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর।

২। যদি ABC ত্রিভুজের BC বাহুর মধ্য বিন্দু D হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$AB + AC > 2AD$$

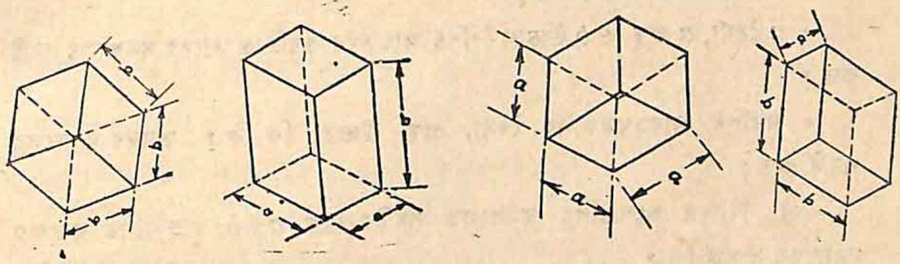
পাঠটীকা—9

বিদ্যালয়—কালিকৃষ্ণ বালিকা বিদ্যালয়
শ্রেণী—অষ্টম
ছাত্রী সংখ্যা—৪০
গড় বয়স—১৩ +
সময়—৪০ মিঃ
তারিখ—১১. ৭. ৭৪
শিক্ষিকা—জয়ন্তী রায়

বিষয়—বীজগণিত
সাধারণ পাঠ—দ্বিপদ রাশির ঘন নির্ণয়
অর্থাৎ
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
—সূত্র নিষ্কাশন ও প্রয়োগ
অভ্যকার পাঠ—ঐ

উদ্দেশ্য—দ্বিপদ রাশির ঘন নির্ণয়ের সূত্র আবিষ্কার ও প্রয়োগের মাধ্যমে ছাত্রীদের পর্যবেক্ষণ ও যুক্তিশক্তির উন্নতি সাধন করা।

উপকরণ—ম্যাসোনাইট দ্বারা নির্মিত দুটি ঘনক ও দু'ধরণের তিনটী করে ছটি আয়তঘন।



আয়োজন—পাঠে ছাত্রীদের আগ্রহ সৃষ্টি করার জন্য তাদের পূর্বজ্ঞানের ভিত্তিতে নিম্নানুরূপ প্রশ্ন করা হবে।

(1) ঘনক ও আয়তঘনর মধ্যে পার্থক্য কি ?

(2) $(a+b)^2=$ কত ?

(3) $3x$ এর ঘন কত ?

(4) আয়তঘনর ঘনফল কিভাবে নির্ণয় করতে হয় ?

(5) $(a+b)$ বাহু বিশিষ্ট ঘনকের ঘনফল কত ?

পাঠঘোষণা—আজ আমরা দুই পদের সমষ্টির ঘন নির্ণয়ের সূত্র অর্থাৎ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$—সূত্রটি নিষ্কাশন করে তা প্রয়োগ করতে শিখব—এই কথা বলে শিক্ষিকা শ্রেণীকক্ষে পাঠঘোষণা করবেন।

উপস্থাপন—শিক্ষিকা প্রথমে নিম্নলিখিত উপায়ে মডেলের সাহায্যে প্রশ্নোত্তরের মাধ্যমে অদ্যকার পাঠটি উপস্থাপন করার চেষ্টা করবেন ও প্রয়োজনবোধে বোর্ডে চিত্র আঁকবেন ;

শিক্ষিকার করণীয়—(১) শিক্ষিকা প্রথমে $a+b$ বাহুবিশিষ্ট সমগ্র ঘনকটি ছাত্রীদের দেখাবেন।

(২) সম্পূর্ণ ঘনকটি থেকে a বাহুবিশিষ্ট ছোট ঘনক b বাহু বিশিষ্ট বড় ঘনক, a দৈর্ঘ্য a প্রস্থ ও b উচ্চতা বিশিষ্ট তিনটি আয়তঘন এবং a দৈর্ঘ্য, b প্রস্থ, b উচ্চতা বিশিষ্ট বাকী তিনটি আয়তঘন বিচ্ছিন্ন করে দেখাবেন ও উত্তরের পরিপ্রেক্ষিতে বোর্ডে ছবি আঁকবেন।

প্রশ্নাবলী—(১) $a+b$ বহুবিশিষ্ট ঘনকটির ঘনফল কত ?

(২) বিচ্ছিন্ন অংশগুলির মধ্যে কয়টি ঘনক ও কয়টি আয়তঘন ?

• ছোট ঘনকটির ঘনফল কত ?

◦ বড় ঘনকটির ঘনফল কত ?

◦ a দৈর্ঘ্য, a প্রস্থ ও b উচ্চতা বিশিষ্ট আয়তঘন কয়টি ও তাদের ঘনফলের সমষ্টি কত ?

◦ অবশিষ্ট আয়তঘনগুলির দৈর্ঘ্য, প্রস্থ, উচ্চতা কি কি ? তাদের ঘনফলের সমষ্টি কত ?

(৩) বিচ্ছিন্ন অংশগুলির ঘনফলের সমষ্টির সঙ্গে $a+b$ বাহুবিশিষ্ট ঘনকের ঘনফলের সম্পর্ক কি ?

◦ তাহলে দুইপদের সমষ্টির ঘন অর্থাৎ $(a+b)^3=$ কি লিখতে পারি ?

শিক্ষিকার করণীয়—উত্তরের পরিপ্রেক্ষিতে শিক্ষিকা $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$—এই সম্পর্কটি বোর্ডে লিখবেন এবং

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+b^3+3a^2b+3ab^2=a^3+b^3+3ab(a+b)$ সূত্রটিকে ছাত্রীদের অনুধাবন করতে বলবেন।

[অতঃপর শিক্ষিকা উক্ত সূত্রটির সত্যতা সুস্পষ্ট ভাবে উপলব্ধি করানোর জন্য ছাত্রীদের দুটি দলে ভাগ করে এক একটি দলকে একটি করে অঙ্ক কষতে দেবেন এবং ছাত্রীদের সহায়তায় উত্তরগুলি নিম্নলিখিত উপায়ে বোর্ডে সাজিয়ে লিখবেন।

গুণ কর :—

(১) $(x+3)(x+3)(x+3)$

(২) $(3a+b)(3a+b)(3a+b)$

সমাধান :—

(১) $(x+3)(x+3)(x+3)=(x+3)^3=x^3+9x^2+27x+27=x^3+3.(x^2).(3)+3.(x).(3)^2+(3)^3$

(২) $(3a+b)(3a+b)(3a+b)=(3a+b)^3$

$$=27a^3+27a^2b+9ab^2+b^3$$

$$=(3a)^3+3.(3a)^2.b+3(3a)(b)^2+(b)^3$$

উপরোক্ত অঙ্কদুটি ও পরীক্ষামূলক প্রমাণের পরিপ্রেক্ষিতে নিম্নলিখিত সূত্রটি বোর্ডে লিখবেন ও ছাত্রীদের লিখে নিতে বলবেন।

(প্রথম পদ + দ্বিতীয় পদ)^3 = (প্রথম পদ)^3 + 3 (প্রথম পদ)^2 (দ্বিতীয় পদ) + 3 (প্রথম পদ) (দ্বিতীয় পদ)^2 + (দ্বিতীয় পদ)^3.

এখন একটি অঙ্ক বোর্ডে লিখে শিক্ষিকা ছাত্রীদের সহায়তায় নিম্নলিখিত ভাবে সেটি করবেন।

সমস্যা : $2x+1$ এর ঘন নির্ণয় কর।

সমাধান :

$$(2x+1)^3=(2x)^3+3.(2x)^2.1+3.(2x).1^2+1^3$$
$$=8x^3+12x^2+6x+1$$

অভিযোজন :

ছাত্রীরা সূত্রটি ঠিক বুঝেছে কিনা পরীক্ষা করার জন্য শিক্ষিকা নিম্নলিখিত শ্রেণীর কাজ দেবেন এবং শ্রেণীতে ঘুরে ঘুরে প্রত্যেক ছাত্রীর কাজ দেখবেন এবং প্রয়োজনমত ব্যক্তিগত সাহায্য করবেন।

ঘন নির্ণয় কর :—

(১) $4x+3y$

(২) $xy+yz$

গৃহকাজ—শিক্ষিকা নিম্নলিখিত অঙ্ক দুটি ছাত্রীদের বাড়ী থেকে করে আনতে বলবেন : ঘন নির্ণয় কর :—

(১) x^2+2y (২) a^2b+c^2d

পাঠটীকা 10

- বিদ্যালয়—বিরাটী উচ্চ বিদ্যালয়
- শ্রেণী—অষ্টম শ্রেণী
- ছাত্রসংখ্যা—৪০ জন
- গড় বয়স—১৩ +
- সময়—৪০ মিনিট
- তারিখ ২৫.৪.৭৪
- শিক্ষক—কমলকৃষ্ণ দেব

বিষয়—জ্যামিতি

সাধারণ পাঠ—ত্রিভুজের বাহুসমূহের ধর্ম।

- বিশেষ পাঠ—"কোন ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।" সত্যটির প্রমাণ।

অদ্যকার পাঠ—উপরোক্ত বিশেষ পাঠ।

উদ্দেশ্য ◦ ছাত্রদের গণিত শাস্ত্র পঠনে উৎসাহিত করা।

◦ ছাত্রদের যুক্তি, বিচার এবং পর্যবেক্ষণ শক্তির বিকাশসাধনে সহায়তা করা।

◦ জ্যামিতি সম্বন্ধে সঠিক দৃষ্টিভঙ্গী জাগাতে ছাত্রদের সাহায্য করা।

◦ "কোন ত্রিভুজের তিন অন্তঃকোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান" —এই সত্যটি প্রমাণ করতে ছাত্রদের সাহায্য করা।

উপকরণ:

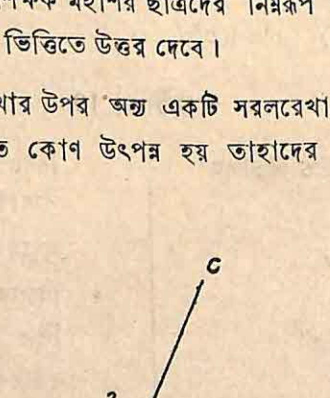
◦ একটি মাপকাটি এবং শ্রেণী কক্ষের সাধারণ উপকরণসমূহ।

আয়োজন : পূর্বজ্ঞান : ছাত্রেরা পূর্বেই শিখেছে—

- একটি সরলরেখার উপর অন্য একটি সরলরেখা দণ্ডায়মান হলে যে দুটি কোণ উৎপন্ন হয় তাদের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।
- যদি একটি সরলরেখা অন্য দুইটি সমান্তরালরেখাকে ছেদ করে তাহলে যে একান্তর এবং অনুরূপ কোণগুলি উৎপন্ন হয় তাহারা পরস্পর সমান।
- কোন ত্রিভুজের একটি বাহু বর্দ্ধিত করলে উৎপন্ন বহিঃকোণ দূরবর্তী অন্তঃকোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

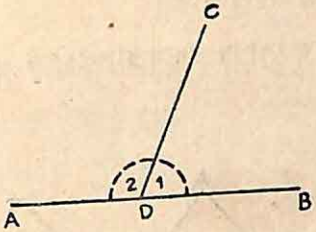
অদ্যকার পাঠ্য বিষয়ে ছাত্রদের মনোযোগ সৃষ্টি করে একটি উপযুক্ত পরিবেশ রচনা করার জন্য শিক্ষক মহাশয় ছাত্রদের নিম্নরূপ প্রশ্ন করবেন। ছাত্ররা তাদের পূর্বজ্ঞানের ভিত্তিতে উত্তর দেবে।

◦ (i) একটি সরলরেখার উপর অন্য একটি সরলরেখা দণ্ডায়মান হলে (চিত্র দেখিয়ে) যে দুটি সন্নিহিত কোণ উৎপন্ন হয় তাহাদের একটি 60° হলে অপর কোণটি কত ডিগ্রী ?

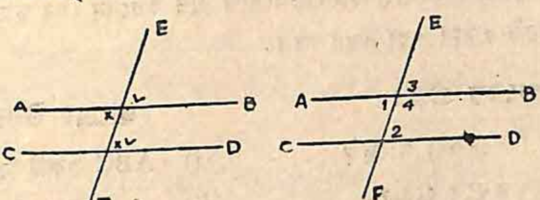


◦ (ii) যদি একটি সরলরেখার উপর অন্য একটি সরলরেখা দণ্ডায়মান হয় (চিত্র

দেখিয়ে) তাহলে উহার সংলগ্ন যে সন্নিহিত কোণদ্বয় উৎপন্ন হয় তাদের সমষ্টি কত ডিগ্রী ?



(iii) যদি AB ও CD দুটি সমান্তরাল সরলরেখাকে EF সরলরেখা ছেদ করে (চিত্র দেখিয়ে) তাহলে যে কোণগুলি উৎপন্ন হয় তাদের মধ্যে অনুরূপকোণও একান্তর কোণ কোন্‌গুলি ?

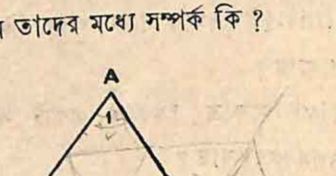


(iv) যদি একটি সরলরেখা অন্যদুইটি সমান্তরাল সরলরেখাকে ছেদ করে (চিত্র দেখিয়ে) তাহলে যে কোণগুলি উৎপন্ন হয় তাদের মধ্যে সম্পর্ক কি ?

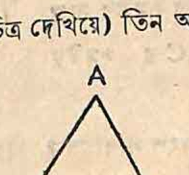
(v) কোন ত্রিভুজের একবাহু বর্দ্ধিত করলে যে বহিঃকোণ উৎপন্ন হয় তার পরিমাণ কত ? [বোর্ডে লিখবেন]

$\angle ACD = \angle CAB + \angle ABC$

$(\angle 1 + \angle 2)$



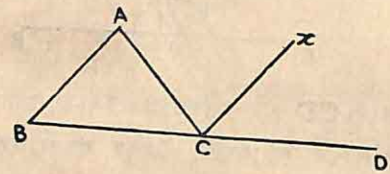
(vi) একটি ত্রিভুজের (চিত্র দেখিয়ে) তিন অন্তঃকোণের সমষ্টি কত ?



$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = ?$

পাঠ ঘোষণা—এই ভাবে প্রস্তুত হয়ে শিক্ষক মহাশয় ঘোষণা করবেন "আজ আমরা কোন ত্রিভুজের তিনটি অন্তঃকোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান"—এই জ্যামিতিক তথ্যটির সত্যতা প্রমাণ করব।

উপস্থাপন : শিক্ষক মহাশয় প্রথমে ব্ল্যাকবোর্ডে একটি ত্রিভুজ আঁকবেন এবং তার নাম দেবেন ABC,



এবার তিনি ছাত্রদের কাছে নিম্নরূপ উপযোগী প্রশ্ন করবেন যেন ছাত্রদের উত্তরের সহায়তায় উপপাদ্যটি প্রমাণ করা সম্ভব হয়।

শিক্ষকের প্রশ্ন :	**ছাত্রের উত্তর :**
(i) চিত্রটিতে কি দেওয়া আছে ?	(i) ABC একটি ত্রিভুজ।
(ii) কি প্রমাণ করতে হবে ?	(ii) $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 2$ সমকোণ।
(iii) দুই সমকোণকে আর কি কোণ বলা যায় ?	(iii) দুই সমকোণকে সরল কোণ বলে।
(iv) এক্ষেত্রে কিরূপে একটি সরলকোণ উৎপন্ন করা যায় ?	(iv) BCকে D পর্যন্ত বর্দ্ধিত করে।
(v) $\angle ACB$ ও $\angle ACD$ কোণ দুইটির সমষ্টি কত ?	(v) দুই সমকোণ।
(vi) $\angle ABC + \angle ACD$-র সমষ্টির সঙ্গে $\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC$-র সমষ্টির সম্পর্ক কি প্রমাণ করতে হবে ?	(vi) সমান।
(vii) উভয় অংশে কোন অংশ সাধারণ ?	(vii) $\angle ACB$ কোণ সাধারণ।
(viii) তাহলে $\angle ACD$-এর সঙ্গে কোন্ কোন্ কোণগুলির সমষ্টির সমান প্রমাণ করা প্রয়োজন।	(viii) $\angle ACD = \angle ABC + \angle BAC$ প্রমাণ করতে হবে

শিক্ষকের প্রশ্ন :	ছাত্রের উত্তর :
(ix) $\angle ACD$ কোণের অংশ অথচ $\angle BAC$ কোণের সমানকোণ কিরূপে আঁকা যায় ?	(ix) যদি আমরা C বিন্দু হইতে $BA \parallel CX$ সরলরেখা টানি তাহলে $\angle BAC = \angle ACX$ যাহা $\angle ACD$-এর অংশ হবে।
(x) যদি AB এবং CX সমান্তরাল সরল রেখাকে AC সরলরেখা ছেদ করে তাহলে যে কোণ উৎপন্ন হয় তাদের মধ্যে সম্পর্ক কি ?	(x) যদি $AB \parallel CX$ হয় এবং AC ছেদক হয় তাহলে $\angle ABC = \angle ACX$ (একান্তর)—(1) হবে
(xi) যদি AB এবং CX সমান্তরাল সরলরেখাকে BD ছেদ করে তাহলে যে কোণগুলি উৎপন্ন হয় তাদের মধ্যে সম্পর্ক কি।	(xi) যদি $AB \parallel CX$ হয় এবং BD ছেদক হয় তাহলে $\angle ABC = \angle XCD$ (অনুরূপ)=(2) হবে
(xii) যদি আমরা পূর্ববর্তী প্রশ্ন দুটির উত্তরকে যোগ করি তাহলে কি ফল পাওয়া যায় ?	(xii) $\angle CAB + \angle ABC =$ $\angle ACX + \angle XCD =$ বহিঃ-কোণ $\angle ACD$ পাওয়া যায়।
(xiii) এখন যদি উভয় দিকে সাধারণ কোণ $\angle ACB$ যোগ করা যায় তাহলে কি ফল পাওয়া যাবে ?	(xiii) $\angle ABC + \angle BCA +$ $\angle CAB =$ বহিঃকোণ $\angle ACD + \angle ACB$ পাওয়া যাবে।
(xiv) $\angle ACD + \angle ACB =$ কত ?	(xiv) $\angle ACD + \angle ACB = 2$ সমকোণ বা সরল কোণ।
(xv) তাহলে ত্রিভুজের ABC-এর তিনটি অন্তঃকোণের ($\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB$) সমষ্টি কত পাওয়া গেল ?	(xv) তিনটি অন্তঃকোণের সমষ্টি দুই সমকোণ পাওয়া গেল ; অর্থাৎ $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 2$ সমকোণ।
(xvi) তাহলে আমরা কি সিদ্ধান্তে উপনীত হলাম ?	(xvi) কোন ত্রিভুজের তিন অন্তঃকোণের সমষ্টি দুই সমকোণ বা সরলকোণ ($180°$)।

অভিযোজন—ছাত্রদের নবলব্ধ জ্ঞান ও দক্ষতা পরীক্ষা করার জন্য শিক্ষক মহাশয় ছাত্রদের কাছে নিম্নরূপ প্রশ্ন করবেন :

(i) $\triangle ABC$-এর $\angle A = 50^\circ$ এবং $\angle B = 70^\circ$ হইলে $\angle C =$ কত ডিগ্রী হইবে ?

(ii) প্রমাণ কর যে চতুর্ভুজের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি চার সমকোণ।

গৃহকাজ—শিক্ষক মহাশয় ছাত্রদের বাড়ী থেকে প্রমাণ করে আনতে বলবেন যে, একটি ত্রিভুজের এক বাহু বর্দ্ধিত করলে যে বহিঃকোণটি উৎপন্ন হয় তা দূরবর্ত্তী অন্তঃকোণদ্বয়ের সমষ্টির সঙ্গে সমান।

পাঠটীকা—11

বিদ্যালয় : দম্‌দম্ বৈদ্যনাথ ইনষ্টিউসন (বালিকা বিভাগ)

শ্রেণী : অষ্টম

ছাত্রীসংখ্যা : ৪০

গড় বয়স : ১৩ +

সময় : ৪০ মিনিট

তারিখ : ৮. ৪. ৭৪

শিক্ষিকা : রমা আদিত্য

বিষয় : বীজগণিত

বিশেষ পাঠ : সূত্রাবলী

পাঠক্রম :

(i) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ সূত্রের আলোচনা।

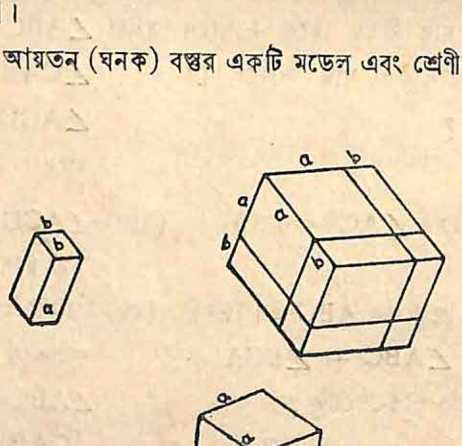
(ii) $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab\,(a+b)$ সূত্র ও উহার প্রয়োগ।

(iii) $a^3 + b^3$ এর সূত্র এবং উহার প্রয়োগ

অদ্যকার পাঠ : উপরের তিনটি পাঠক্রম

উদ্দেশ্য—$a^3 + b^3$ এর সূত্র আবিষ্কার ও উহার প্রয়োগ সম্বন্ধে ছাত্রীদের অবহিত করা এবং তাদের চিন্তাশক্তি ও বিচার শক্তি এবং বিশ্লেষণ ক্ষমতার বিকাশ সাধনে সহায়তা করা।

উপকরণ—ত্রি আয়তন (ঘনক) বস্তুর একটি মডেল এবং শ্রেণীকক্ষের প্রয়োজনীয় সাধারণ সরঞ্জাম।



আয়োজন—পূর্ব জ্ঞানের ভিত্তিতে ছাত্রীদের অন্তকার পাঠাভিমুখী করবার জন্য শিক্ষিকা শ্রেণীকক্ষে নিম্নরূপ প্রশ্নের অবতারণা করবেন।

(1) $(a+b)^3=$ কত ?

(2) $x=3-1$ হইলে $x+1=$ কত ?

(3) $a(a+b)-b(a+b)$ রাশিটীতে সাধারণপদ কি এবং তার ভিত্তিতে সরলীকৃত রূপটী কি ?

(4) a দৈর্ঘ্য, a প্রস্থ, b উচ্চতা বিশিষ্ট আয়তঘনর ঘনফল কত ?

(5) a বাহু বিশিষ্ট ঘনক ও b বাহুবিশিষ্ট ঘনকের ঘনফলের সমষ্টি কত ?

পাঠঘোষণা—আজ আমরা a^3+b^3 সূত্রটির নিষ্কাশন ও প্রয়োগ করতে শিখবো—এই বলে শিক্ষিকা শ্রেণীতে পাঠ ঘোষণা করবেন।

উপস্থাপন—শিক্ষিকা আলোচনা ও প্রশ্নোত্তরের মাধ্যমে উপকরণের সাহায্যে নিম্নরূপ ভাবে বিষয়টি ছাত্রীদের বুঝিয়ে দেবেন।

প্রশ্ন :—

(1) $a^3+b^3+3ab(a+b)$ রাশিটী কার সূত্র ?

(2) $a^3+b^3+3ab(a+b)=(a+b)^3$ হলে a^3+b^3 এর মান নির্ণয় কিভাবে করবে ?

(3) $(a+b)^3-3ab(a+b)$ রাশিটীকে সাধারণ পদের ভিত্তিতে কিভাবে সরলীকৃত করা যায় ?

(4) তাহলে a^3+b^3 এর সূত্র আমরা কি কি পেলাম ?

ছাত্রীদের উক্তসূত্রের ধারণাকে সুস্পষ্ট করবার জন্য শিক্ষিকা মডেলটি দেখাবেন এবং প্রশ্নোত্তরের মাধ্যমে বোর্ডের সহায়তায় সূত্রটির সত্যতা প্রমাণ করবেন।

প্রশ্ন :

(1) (ঘনকের সম্পূর্ণ মডেলটি দেখিয়ে) $(a+b)$ বাহু বিশিষ্ট ঘনকটীর ঘনফল কত ?

(2) (ঘনকটীর বিভিন্ন অংশগুলি বিচ্ছিন্ন করে) এখানে কয়টী ঘনক এবং কয়টী আয়তঘন দেখতে পাচ্ছ ?

(3) ঘনক দুটীর ঘনফল কি কি ? (চিত্র অঙ্কন করে)

(4) আয়তঘন দুটীর মধ্যে সমআকৃতি বিশিষ্ট আয়তঘন কোন্‌গুলি ? (চিত্র অঙ্কন করে).

(5) (a দৈর্ঘ্য, a প্রস্থ, b উচ্চতা বিশিষ্ট আকৃতির একটি আয়তঘন দেখিয়ে) এই আয়ত ঘনটির ঘনফল কত? (চিত্র অঙ্কন করে)।

এইরূপ তিনটি আয়তঘনর ঘনফল কত হবে?

(6) (b দৈর্ঘ্য, b প্রস্থ, a উচ্চতা বিশিষ্ট আয়তঘনটির ঘবফল কত? (মডেল দেখিয়ে ও চিত্র অঙ্কন করে)

এইরূপ তিনটি আয়তঘনর ঘনফল কত?

(7) আমাদের কোন্ দুটী ঘনকের ঘনফলের সমষ্টি নির্ণয় করতে হবে? (বোর্ডে লিখে)

(8) সম্পূর্ণ ঘনকটীর ঘনফল থেকে কোন্ কোন্ ঘনফলগুলি বিচ্ছিন্ন করলে a^3+b^3 পাওয়া যায়? (বোর্ডে সমস্যাটীর সমাধান নিম্নলিখিত উপায়ে করে দেখাবেন)

সমাধান :

$$\begin{aligned} a^3+b^3 &= (a+b)^3-3a^2b-3ab^2 \\ &= (a+b)^3-3ab\,(a+b) \\ &= (a+b)\{(a+b)^2-3ab\} \\ &= (a+b)\,(a^2+2ab+b^2-3ab) \\ &= (a+b)\,(a^2-ab+b^2) \end{aligned}$$

শিক্ষিকা তারপর a কে ১ম পদ ও bকে ২য় পদ ধরে নিম্নলিখিত সূত্রটী বোর্ডে লিখে ছাত্রীদের খাতায় লিখে নিতে বলবেন ও দুটী সমস্যা ছাত্রীদের সহায়তায় বোর্ডে সমাধান করবেন।

$a=$ ১ম পদ, $b=$ ২য় পদ ধরলে $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab\,(a+b)$

(১মপদ + ২য়পদ)^3 = (১মপদ)^3 + (২য়পদ)^3 + 3. ১মপদ. ২য়পদ (১মপদ + ২য়পদ).

(১মপদ)^3 + (২য়পদ)^3 = (১মপদ + ২য়পদ)^3 − 3 ১মপদ. ২য়পদ. (১মপদ + ২য়পদ)

অথবা

। = (১মপদ + ২য়পদ){(১মপদ)^2 − ১মপদ.২য়পদ + (২য়পদ)^2}

1. $(a+b)=7,\ ab=10$ হইলে $a^3+b^3=$ কত?

$$\begin{aligned} a^3+b^3 &= (a+b)^3-3ab(a+b). \\ &= (7)^3-3.10.7. \\ &= 343-210=133 \end{aligned}$$

2. গুণকর :—

$$(x^2-x+1)(x+1)$$
$$=(x+1)\{(x)^2-x.1+(1)^2\}$$
$$=(x)^3+(1)^3=x^3+1$$

অভিযোজন :

ছাত্রীদের নবলব্ধ জ্ঞান পরীক্ষা করবার জন্য শিক্ষিকা ছাত্রীদের নিম্নরূপ প্রশ্নগুলি করবেন এবং প্রয়োজন বোধে সমস্যা সমাধানে ব্যক্তিগত সহায়তা করবেন।

1. $x+\frac{1}{x}=3$ হইলে $x^3+\frac{1}{x^3}=$ কত ?

2. $9x^2-12x+16$ কে $3x+4$ দ্বারা গুণ কর।

গৃহকাজ :

ছাত্রীদের গৃহে অনুশীলনের জন্য শিক্ষিকা নিম্নলিখিত অঙ্কগুলি কষে আনতে বলবেন।

1. $a=(b+c)$ হলে প্রমাণ কর,
   $a^3-b^3-c^3=3abc$

2. $(25p^2-5p+1)$ কে $5p+1$ দ্বারা গুণ কর।

পাঠটীকা—12

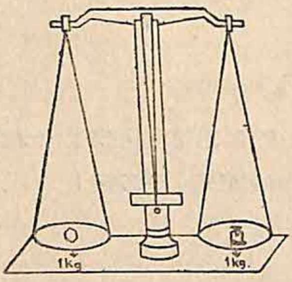
বিদ্যালয় : বৈদ্যনাথ ইনষ্টিটিউসন
শ্রেণী : অষ্টম
ছাত্রী সংখ্যা : ৪০ জন
গড় বয়স : ১৩+
সময় : ৪০ মিনিট
শিক্ষিকা : ভারতী মিত্র
তারিখ : ৮।৪।৭৪

বিষয় : বীজগণিত
সাধারণ পাঠ : সরল সমীকরণ
অদ্যকার পাঠ : সরল সমীকরণ সমাধানে ব্যবহৃত স্বতঃসিদ্ধগুলির প্রমাণ ও বিভিন্ন প্রশ্ন সমাধানে তাদের প্রয়োগ।

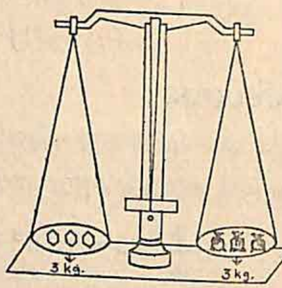
উদ্দেশ্য : (১) বীজগণিতের কোন অজ্ঞাত রাশির মান নির্ণয়ের মাধ্যমে ছাত্রাদের বীজগণিত পাঠে আগ্রহী করা।

(২) ছাত্রীদের চিন্তা শক্তি, বিচার শক্তি ও বিশ্লেষণী দক্ষতার বিকাশে সহায়তা করা।

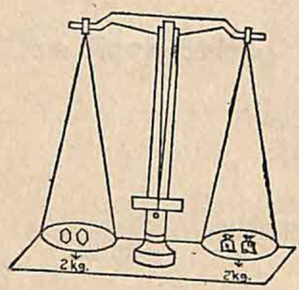
উপকরণ : (১) দাঁড়ি পাল্লার বিভিন্ন প্রকারের ছবি সহ একটি বড় কার্টিজ পেপার।



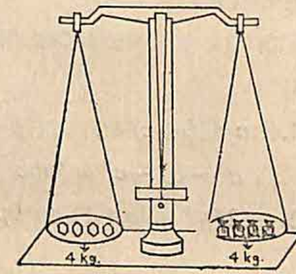
(১)



(২)



(৩)



(৪)

(২) শ্রেণীর সাধারণ উপকরণ।

আয়োজন : শিক্ষার্থীদের পূর্বজ্ঞান পরীক্ষার জন্য ও পূর্ব জ্ঞানের সঙ্গে অদ্যকার পাঠের সম্পর্ক স্থাপন করবার জন্য শিক্ষিকা নিম্নরূপ প্রশ্নগুলি শ্রেণীকক্ষে করবেন।

(১) 10 অপেক্ষা 'a' কত বেশী ?

(২) A-র বর্তমান বয়স 20 বৎসর। 'x' বৎসর পূর্বে তার বয়স কত ছিল ?

(৩) 'y' কিলোগ্রামে কত গ্রাম ?

(৪) "'p' সংখ্যার 6 গুণ 72" – এটী কি ভাবে বীজগণিতে প্রকাশ করবে ?

(৫) উপরোক্ত সমস্যাগুলিতে অজ্ঞাত রাশিগুলি কি কি ?

(৬) $(x+1)(x-1)=x^2-1$ এবং $6p=72$ – এই দুটি সমস্যার মধ্যে অজ্ঞাত রাশি কি কি ? তাদের মধ্যে তফাৎ কি ? [শিক্ষিকা বোর্ডে লিখে ছাত্রীদের অভেদ ও সমীকরণের মধ্যে পার্থক্য বুঝিয়ে দেবেন।]

পাঠ ঘোষণা : "আজ আমরা একটি মাত্র অজ্ঞাত রাশি বিশিষ্ট সরল সমীকরণ সমাধানে ব্যবহৃত স্বতঃসিদ্ধগুলির প্রমাণ ও বিভিন্ন সমস্যা সমাধানে তাদের প্রয়োগ কি ভাবে হয় তা শেখবার চেষ্টা করব"—এই বলে শিক্ষিকা শ্রেণীকক্ষে অদ্যকার পাঠ ঘোষণা করবেন।

উপস্থাপন : শিক্ষিকা দাঁড়ি পাল্লার বিভিন্ন অবস্থান চিহ্নিত চার্টটি দেওয়ালে টাঙিয়ে প্রশ্নোত্তরের মাধ্যমে উপকরণের সহায়তায় নিম্ন উপায়ে অদ্যকার পাঠদানে অগ্রসর হবেন।

শিঃ প্রঃ—(ক) (১ নং চিত্রের প্রতি নির্দেশ করে) দাঁড়ি পাল্লা এখানে কি অবস্থায় আছে এবং কেন আছে ?

ছাঃ উঃ—দাঁড়ি পাল্লা আনুভূমিক অবস্থায় আছে, কারণ দুই পাল্লায় সমান ওজনের (অর্থাৎ 1 kg ওজন) বস্তু আছে।

শিঃ প্রঃ—(২) (২নং চিত্রের দাঁড়িপাল্লা নির্দেশ করে)

এখানে দাঁড়ি পাল্লা কি অবস্থায় আছে এবং কেন ?

ছাঃ উঃ—আনুভূমিক অবস্থায় আছে। কারণ দুই দিকের ওজন সমান।

শিঃ প্রঃ (৩) ১নং চিত্রের ও ২নং চিত্রের দাঁড়িপাল্লার মধ্যে কি পার্থক্য দেখা যাচ্ছে ?

ছাঃ উঃ—১নং চিত্রে বাম পাল্লায় 1 কেজি ওজনের বাটখারা ও ডান পাল্লায় 1 কেজি ওজনের ময়দার ব্যাগ আছে। ২নং চিত্রে বাম পাল্লায় 1 কেজি ওজনের দুটি বাটখারা ও ডান পাল্লায় 1 কেজি ওজনের দুটি ময়দার ব্যাগ অতিরিক্ত বসান আছে।

শিঃ প্রঃ—(৪) তাহলে পাল্লাদ্বয় আনুভূমিক করার জন্য উভয় পাল্লায় কি পরিমাণের বস্তু যোগ করা হয়েছে ?

ছাঃ উঃ—উভয় পাল্লায় সমান ওজনের বস্তু যোগ করা হয়েছে।

শিক্ষিকা উক্ত পরীক্ষার ভিত্তিতে নিম্নলিখিত স্বতঃসিদ্ধে আসবেন এবং একটি সমীকরণ প্রশ্নোত্তরের মাধ্যমে ছাত্রীদের সহায়তায় বোর্ডে করবেন।

"সমান সমান রাশির সঙ্গে সমান সমান রাশি যোগ করলে সমীকরণের উভয় পক্ষ সমান হয়"।

সমস্যা :— $x-4=6$

শিঃ প্রঃ—(১) এখানে অজ্ঞাত রাশি কোনটি ?

ছাঃ উঃ—অজ্ঞাত রাশি $= x$.

শিঃ প্রঃ—(২) x-এর মান বার করতে হলে উভয় পক্ষকে ১নং স্বতঃসিদ্ধ অনুযায়ী কি করতে হবে ?

ছাঃ উঃ—x-র মান বার করতে হলে উভয় পক্ষের সঙ্গে 4 যোগ করিতে হবে।

সমাধান ঃ—

$$(x-4)+4=6+4$$

or, $\quad x=10.$

শিঃ প্রঃ—(১) [৩নং চিত্রের প্রতি নির্দেশ করে।] এখানে দাঁড়িপাল্লা কি অবস্থায় আছে এবং কেন আছে ?

ছাঃ উঃ—দাঁড়িপাল্লা আনুভূমিক অবস্থায় আছে, কারণ উভয় পাল্লায় 2 kg করে অর্থাৎ সমান ওজনের বস্তু আছে।

শিঃ প্রঃ—(২) ২নং চিত্র ও ৩নং চিত্রের মধ্যে পার্থক্য কি ?

ছাঃ উঃ—২নং চিত্রের তুলনায় ৩নং চিত্রের উভয় পাল্লা থেকে 1 kg করে ওজন কমান হয়েছে।

শিঃ প্রঃ—উভয় পাল্লা থেকে সমান ওজনের বস্তু বিয়োগ করার ফলে উভয় পাল্লা এখন কি অবস্থায় আছে ?

ছাঃ উঃ—উভয় পাল্লা সমান অর্থাৎ আনুভূমিক অবস্থায় আছে।

শিক্ষিকা উক্ত পরীক্ষার ভিত্তিতে নিম্নলিখিত স্বতঃসিদ্ধটি বোর্ডে লিখবেন এবং নিম্নের সমস্যাটি ছাত্রীদের সহায়তায় সমাধান করবেন।

"সমান সমান রাশি থেকে সমান সমান রাশি বিয়োগ করলে সমীকরণের উভয়পক্ষ সমান হয়।"

সমস্যা :— $x+3=5$

(১) শিঃ প্রঃ—এখানে অজ্ঞাত রাশির সঙ্গে '3' কি অবস্থায় আছে ?

ছাঃ উঃ—অজ্ঞাত রাশির সঙ্গে 3 যুক্ত অবস্থায় আছে।

(২) শিঃ প্রঃ—অজ্ঞাত রাশি 'x'-এর মান নির্ণয় করার জন্যে উভয় পক্ষ থেকে কি করতে হবে এবং কেন ?

ছাঃ উঃ—স্বতঃ সিদ্ধের ২য় সূত্র অনুযায়ী উভয় পক্ষ থেকে 3 বিয়োগ করতে হবে।

সমাধান : $(x+3)-3=5-3$

or, $x=2$

(১) শিঃ প্রঃ—[৪নং চিত্র নির্দেশ করে] এই দাঁড়িপাল্লার উভয়দিকের ওজন কেমন?

ছাঃ উঃ—উভয়দিকের ওজন সমান।

(২) শিঃ প্রঃ—উভয়দিকের ওজন সমান থাকার ফলে পাল্লাটি কি অবস্থায় আছে?

ছাঃ উঃ—পাল্লাটি আনুভূমিক অবস্থায় আছে।

(৩) শিঃ প্রঃ—৩নং চিত্রের তুলনায় ৪নং চিত্রের বাম পাল্লায় কত গুণ বেশী ওজনের বাটখারা বসান হয়েছে?

ছাঃ উঃ—2 গুণ বেশী বাটখারা বসান হয়েছে।

(৪) শিঃ প্রঃ—এর ডানপাল্লায় কি পরিবর্তন লক্ষ্য করছো?

ছাঃ উঃ—ডানপাল্লাতেও 2 গুণ বেশী ময়দার ব্যাগ বসান হয়েছে।

(৫) শিঃ প্রঃ—উভয় পাল্লায় সমান গুণিতক ওজন বেশী করা সত্ত্বেও উভয় পাল্লা কি অবস্থায় আছে?

ছাঃ উঃ—উভয় পাল্লা সমান অর্থাৎ আনুভূমিক অবস্থায় আছে।

উপরোক্ত পরীক্ষার ভিত্তিতে শিক্ষিকা নিম্ন স্বতঃসিদ্ধটি বোর্ডে লিখবেন ও একটি সমস্যা ছাত্রীদের সহায়তায় সমাধান করবেন।

"সমান সমান রাশির সঙ্গে সমান সমান রাশি গুণ করলে সমীকরণের উভয় পক্ষ সমান হয়।

সমস্যা :—$\frac{x}{2}=10$

(১) শিঃ প্রঃ—এখানে অজ্ঞাত রাশির সঙ্গে 2 কি অবস্থায় আছে?

ছাঃ উঃ—অজ্ঞাত রাশির সঙ্গে 2 বিভক্ত অবস্থায় আছে।

(২) শিঃ প্রঃ—অজ্ঞাত রাশির মান নির্ণয় করতে হলে উভয় পক্ষকে কি করার প্রয়োজন এবং কেন?

ছাঃ উঃ—অজ্ঞাত রাশির মান বার করতে হলে ৩য় স্বতঃসিদ্ধ অনুযায়ী উভয় পক্ষকে 2 দিয়ে গুণ করতে হবে।

সমাধান :—

$\frac{x}{2}\times 2=10\times 2$

or, $x=20$

(১) শিঃ প্রঃ— [১নং চিত্র নির্দেশ ক'রে] দাঁড়ি পাল্লার উভয় দিকে কি পরিমাণ ওজনের বস্তু আছে ? তার ফলে পাল্লাদ্বয় কেমন অবস্থায় আছে ?

ছাঃ উঃ—উভয় দিকে 1 kg ওজনের অর্থাৎ সমান ওজনের বস্তু আছে। পাল্লাদ্বয় আনুভূমিক অবস্থায় আছে।

(২) শিঃ প্রঃ—৪নং চিত্রের তুলনায় ১নং চিত্রের উভয় পাল্লায় কি পরিবর্তন দেখা যাচ্ছে ?

ছাঃ উঃ—৪নং চিত্রের তুলনায় ১নং চিত্রের উভয় পাল্লায় 4 ভাগের এক ভাগ ওজন রাখা হয়েছে।

(৩) শিঃ প্রঃ—উভয় পাল্লা থেকে সমান ভাগ ওজনের বস্তু কমিয়ে নেওয়া সত্ত্বেও পাল্লাদ্বয় কি অবস্থায় আছে ?

ছাঃ উঃ—সমান ওজন কমানোর ফলে পাল্লাদ্বয় আনুভূমিক অবস্থায় আছে।

(৪) শিঃ প্রঃ—এর থেকে আমরা কি সিদ্ধান্ত করতে পারি ?

ছাঃ উঃ—সমান ওজনের বস্তু থেকে সমান ভাগ ওজন কমিয়ে নিলে উভয় পাল্লা আনুভূমিক থাকে।

শিক্ষিকা উক্ত পরীক্ষার ভিত্তিতে নিম্নস্বতঃসিদ্ধটি বোর্ডে লিখবেন ও ছাত্রীদের সহায়তায় একটি সমীকরণ সমাধান করবেন।

"সমান সমান রাশিকে সমান সমান রাশি দ্বারা ভাগ করলে সমীকরণের উভয় পক্ষ সমান হয়।

সমস্যা :—$5x=30$.

(১) শিঃ প্রঃ—এখানে অজ্ঞাত রাশির সঙ্গে 5 কি অবস্থায় আছে ?

ছাঃ উঃ—অজ্ঞাত রাশির সঙ্গে 5 গুণিতক অবস্থায় আছে।

(২) শিঃ প্রঃ—অজ্ঞাত রাশিটীর মান নির্ণয় করতে হ'লে কি করতে হবে এবং কেন ?

ছাঃ উঃ— ৪র্থ স্বতঃসিদ্ধ অনুযায়ী উভয় পক্ষকে 5 দিয়ে ভাগ করতে হবে।

সমাধান ঃ

$$5x=30$$

বা, $$\frac{5x}{5}=\frac{30}{5}$$

বা, $$x=6$$

অভিযোজন ঃ ছাত্রীদের নবলব্ধ জ্ঞান পরীক্ষার্থে শিক্ষিকা নিম্নলিখিত সমীকরণগুলো সমাধান করতে বলবেন এবং প্রয়োজনে ব্যক্তিগত সাহায্য করবেন ঃ

সমাধান কর ঃ

(1) $3x+7=16$

(2) $69=3(5x-2)$

(3) $9x-5=5x+15$

গৃহকাজ ঃ শিক্ষিকা নিম্নের সমীকরণগুলো ছাত্রীদের বাড়ী থেকে সমাধান করে আনতে বলবেন ঃ

সমাধান কর ঃ

(1) $5(x+2)=30$

(2) $8\left(\frac{1}{2}x-3\right)=16$

(3) $10x+2(x-7)+2x=0$

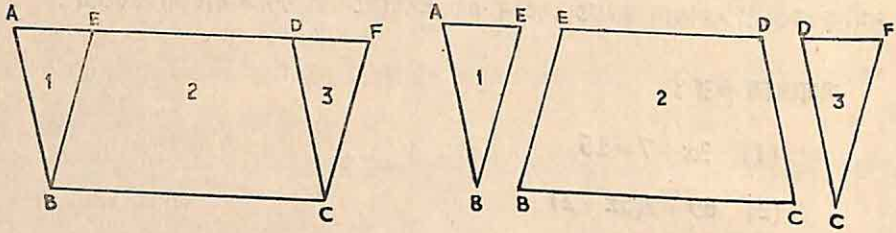
পাঠ টীকা 13

বিদ্যালয় ঃ বৈদ্যনাথ ইন্‌স্টিটিউশন ফর গালর্স
শ্রেণী—নবম
গড় বয়স—১৪$^{+}$
সময়—৪০ মিঃ
তারিখ—৮.৪.৭৪
শিক্ষিকা—শিবানী ভট্টাচার্য্য

বিষয়—জ্যামিতি
আজকের পাঠ—"একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত সামান্তরিক সমূহের ক্ষেত্রফল সমান"।—প্রমাণ

উদ্দেশ্য ঃ শিক্ষিকা ছাত্রীদের আজকের এই পাঠের প্রতি আকৃষ্ট হওয়ার জন্য সাহায্য করবেন এবং তাদের যুক্তি, বিচারবুদ্ধি ও চিন্তাশক্তির উৎকর্ষ সাধনে সহায়তা করবেন।

উপকরণ : শ্রেণীতে ব্যবহৃত সাধারণ উপকরণ, স্কেল এবং একটী চার্ট।



পূর্বজ্ঞান ও আয়োজন : ছাত্রীদের পূর্বজ্ঞান অনুসন্ধানের জন্য কয়েকটি প্রশ্ন করবেন এবং ছাত্রীদের পাঠানুরাগের সৃষ্টি করবেন :

(i) সামান্তরিক কাকে বলে ?

(ii) AB, CD সমান্তরাল সরলরেখাকে EF রেখা ছেদ করলে অনুরূপ কোন্‌গুলি কি কি ? [বোর্ডে চিত্র অঙ্কন ক'রে]

(iii) সর্বসম ত্রিভুজ কাকে বলে ও তার সর্ত কি কি ?

(iv) ABCD সামান্তরিকের ভূমি কোন্‌টি এবং সমান্তরাল যুগল কি কি ?

পাঠঘোষণা : তাহলে আজ আমরা পড়ব যে একই ভূমির ওপর এবং একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত সামান্তরিক সমূহের ক্ষেত্রফল সমান।

উপস্থাপন : শিক্ষিকা নিম্নলিখিত উপায়ে উপকরণের সহায়তায় প্রশ্নোত্তরের মাধ্যমে অদ্যকার বিষয়বস্তুটি ছাত্রীদের সামনে উপস্থাপন করবার চেষ্টা করবেন।

পরীক্ষামূলক প্রমাণ :

শিক্ষিকার করণীয়

শিক্ষিকা ABCD এবং EBCF সমান্তরিকদ্বয় একই ভূমি BC ও একই সমান্তরাল যুগল BC ও AF এর মধ্যে অবস্থিত এরূপ চিত্রটি বোর্ডে আঁকবেন এবং প্রত্যেক ছাত্রীকে এরূপ চিত্র সম্বলিত অঙ্কিত কাগজ দেবেন।

প্রশ্নাবলী

(1) বোর্ডে অঙ্কিত সামান্তরিকদ্বয় ABCD ও EBCF কি অবস্থায় আছে ?

(2) কি প্রমাণ করতে হবে ?

(3) অঙ্কিত চিত্রটিতে সামান্তরিক-দ্বয়ের মধ্যে আয়তন সমান এরূপ সাধারণ অংশ কোন্‌টি ?

(4) সামান্তরিকদ্বয়ের ক্ষেত্রফল সমান প্রমাণ করার জন্য অবশিষ্ট কোন্ কোন্ অংশ সমান প্রমাণ করা প্রয়োজন ?

শিক্ষিকার করণীয়

শিক্ষিকা কাগজে অঙ্কিত চিত্রটিও ছাত্রীদের সামনে তুলে ধরবেন।

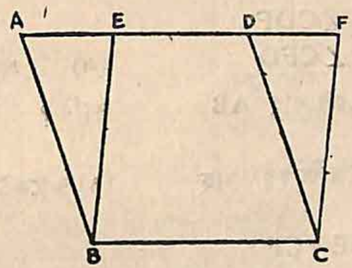
শিক্ষিকা নিজে ব্লেড বা কাঁচির সাহায্যে ত্রিভুজ দুটিকে বিচ্ছিন্ন করে একটিকে আর একটির উপর স্থাপন করবেন এবং ছাত্রীদেরও অনুরূপ করতে বলবেন।

প্রশ্নাবলী

(5) এই কাগজটীর চিত্রটিতে কি পদ্ধতি অবলম্বন করলে ত্রিভুজ দুটি সমান প্রমাণ করা যেতে পারে?

(1) ত্রিভুজ দুটি সমান হওয়ার ফলে সামান্তরিক দুটি সম্পর্কে আমরা কি সিদ্ধান্তে আসতে পারি?

অতঃপর শিক্ষিকা প্রমাণটিকে বিশ্লেষণী পদ্ধতির সাহায্যে নিম্নলিখিত উপায়ে উপস্থাপন করবেন।



উত্তরের ভিত্তিতে শিক্ষিকা উপরের চিত্রটী বোর্ডে আঁকবেন।

(1) প্রদত্ত উপপাদ্যটীতে কি দেওয়া আছে ও কি প্রমাণ করতে হবে?

(2) পরীক্ষামূলক প্রমাণের ভিত্তিতে সামান্তরিক দুটীর সাধারণ অংশ বাদ দিলে আর কোন্ কোন্ অংশ অবশিষ্ট থাকে?

(3) সেই দুটীর মধ্যে কি সম্পর্ক স্থাপন করলে সামান্তরিক দুটীর ক্ষেত্রফল সমান প্রমাণ করা যেতে পারে?

এবার শিক্ষিকা উপপাদ্যটী সংশ্লেষণ পদ্ধতির সাহায্যে এবং ছাত্রীদের সাহায্যে বোর্ডে করে দেখাবেন।

বিষয়

ABCD এবং EBCF সামান্তরিক দ্বয় একই ভূমি BC এবং একই সমান্তরাল যুগল BC ও AF এর মধ্যে অবস্থিত, (১) প্রমাণ করতে হবে যে

▭ABCD = ▭EBCD.

(২) ABCD সামান্তরিক এবং EBCF সামান্তরিক

(৩) EBCD ক্ষেত্রটী

(৪) △ABE এবং △DEF

(৫) দুটি ত্রিভুজকে সর্বসম দেখাতে হবে

(৬) ABCF ক্ষেত্রে AB ∥ CD, AF ছেদক
আবার BE = CF, AF ছেদক
∠BAE = অনুরূপ ∠CDF
∠BEA = অনুরূপ ∠CFD
ABCD সামান্তরিকের বাহু AB এবং CD
আবার EBCF সামান্তরিকের বাহু BE এবং CF
AB = CD এবং BE = CF

(৭) ∴ △ABE এবং △DCF এর মধ্যে
∠BAE = ∠CDF ;
∠BEA = ∠CFD
এবং AB = CD, BE = CF

(৮) △ABE এবং △DCF সর্বসম

আমরা জানি যে সমান সমান বস্তুর সংগে একই বস্তু যোগ করলে সেই যোগফলগুলিও সমান হয়, △ABE এবং সংগে BCDE যোগ করলে এবং △DCF-এর সংগে BCDE যোগ করলে দুটি সামান্তরিক ABCD এবং EBCF হয়।

পদ্ধতি

(১) এখানে কি প্রমাণ করতে হবে ?

(২) এই চিত্রে সামান্তরিক দুটী কি কি ?

(৩) এই সামান্তরিকদ্বয়ের মধ্যে সাধারণ অংশ কোন্‌টী ?

(৪) BCAF ক্ষেত্রটীর মধ্যে EBCD বাদে আর কি কি অংশ পড়ে থাকে ?

(৫) তাহলে আমাদের এখন কি করতে হবে ?

(৬) ∴ আমরা কি সিদ্ধান্তে আসতে পারি ?

(৭) কাজেই আমরা কি বলতে পারি ?

(৮) ∴ দুটি ত্রিভুজের মধ্যে কি সম্পর্ক স্থাপিত হল।

(৯) □ABCD = □EBCF অর্থাৎ সামান্তরিক ABCD এবং সামান্তরিক EBCF এর ক্ষেত্রফল সমান।

(৯) এই সামান্তরিকদ্বয়ের মধ্যে সম্পর্ক কি স্থাপিত হল?

অভিযোজন ঃ ছাত্রীরা উপপাদ্যটি বুঝল কিনা বোঝার জন্য শিক্ষিকা তাদের ঐ উপপাদ্যটি সম্পর্কে কয়েকটি প্রশ্ন করবেন। [শিক্ষিকা প্রশ্নগুলি নিজে তৈরী করার চেষ্টা করবেন]

বাড়ীর কাজ ঃ শিক্ষিকা ছাত্রীদের বাড়ী থেকে এই উপপাদ্যটি বাড়ী থেকে লিখে আনতে বলবেন।

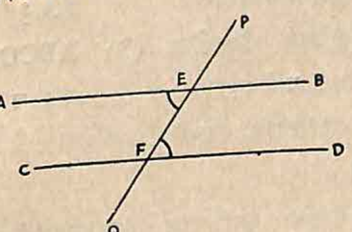
পাঠটীকা—14

মধ্যমগ্রাম বয়েজ হাই স্কুল।
নবম—শ্রেণী
ছাত্র সংখ্যা—40
গড় বয়স—14 বৎসর +
সময়—40 মিনিট।
তারিখ—5.4.74
শিক্ষক—গোবিন্দপ্রসাদ দালাল।

জ্যামিতি।
সাধারণ পাঠ—সামান্তরিকের।
ধর্ম সম্পর্কীয় উপপাদ্য।
বিশেষ পাঠ—চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান হলে চতুর্ভুজটি সামন্তরিক হবে।
অদ্যকার পাঠ—ঐ

উদ্দেশ্য ঃ—প্রদত্ত উপপাদ্যটি প্রমাণ করতে এবং তার প্রয়োগের দ্বারা জ্যামিতিক সমস্যা সমাধানে ছাত্রদের সহায়তা করতে এবং তাদের বিচার, যুক্তিও পর্যবেক্ষণ শক্তির বিকাশে সহায়তা করা।

উপকরণ ঃ—শ্রেণীকক্ষের সাধারণ উপকরণ এবং জ্যামিতিক যন্ত্রপাতি।



(১)

আয়োজন ঃ—উপযুক্ত পরিবেশ সৃষ্টি এবং ছাত্রদের মনকে পাঠ্যাভিমুখী করবার জন্য শিক্ষক মহাশয় ছাত্রদের পূর্বজ্ঞানের ভিত্তিতে শ্রেণীকক্ষে নিম্নলিখিত প্রশ্নের অবতারণা করবেন।

(i) সামান্তরিক কাকে বলে?

(ii) সামান্তরিকের কর্ণ কিভাবে অংকন করবে ?

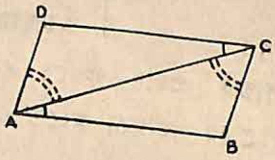
(iii) ১নং চিত্রানুযায়ী AB এবং CD সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়কে PQ সরলরেখা E এবং F বিন্দুতে ছেদ করলে ∠AEF এবং ∠EFD কোন্ জাতীয় কোণ হবে, তাদের মধ্যে সম্বন্ধ কি ?

(iv) ABC এবং DEF ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম হবার সর্তগুলি বল।

পাঠ ঘোষণা :—সমস্যাটির অবতারণা করে শিক্ষক মহাশয় বলবেন—আজ আমরা প্রমাণ করব চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান হলে চতুর্ভুজটি সামান্তরিক হবে। এই বলে শিক্ষক মহাশয় শ্রেণীকক্ষে পাঠ ঘোষণা করবেন।

উপস্থাপন :—শিক্ষক মহাশয় উপপাদ্যটির বিবৃতি বোর্ডে লিখবেন এবং ABCD একটি চতুর্ভুজ অংকন করবেন। পরে ছাত্রদের সহায়তায় বিশ্লেষণী পদ্ধতিতে উপপাদ্যটী ছাত্রদের সহায়তায় প্রমাণ করবেন।

বিষয়	**পদ্ধতি**
(1) বিবৃতিতে দেওয়া আছে চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান। অর্থাৎ AB = CD এবং AD = BC।	(1) উপপাদ্যের বিবৃতিতে কি দেওয়া আছে ?



(2) আমাদের প্রমাণ করতে হবে যে ABCD চতুর্ভুজটী একটী সামান্তরিক।	(2) আমাদের কি প্রমাণ করতে হবে ?
(3) ABCD চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুদ্বয় সমান দেওয়া আছে ; যদি দেখানো যায় যে বিপরীত বাহুদ্বয় সমান্তরাল তবেই ABCD সামন্তরিক হবে।	(3) ABCD-কে সামন্তরিক প্রমাণ করা যায় কি ভাবে ?
(4) বিপরীত বাহুদ্বয়কে সমান্তরাল দেখাতে হলে আমাদের A এবং C বিন্দুতে অথবা B এবং D বিন্দুতে দুটী সমান কোণ দেখানো প্রয়োজন ; যে কোণ দুটী একান্তর কোণ হবে।	(4) বিপরীত বাহুদ্বয়কে সমান্তরাল প্রমাণ করতে হলে আমাদের কি প্রয়োজন ?

বিষয়	পদ্ধতি
(5) আমাদের ছেদকের প্রয়োজন।	(5) এখন একান্তর কোণ করতে হলে আমাদের কি প্রয়োজন ?
(6) A এবং C বিন্দু যোগের ফলে আমরা এই ছেদক পেতে পারি।	(6) এই ছেদক আমরা কিরূপে পেতে পারি ?
(7) ABCD চতুর্ভুজকে আমরা দুটি ত্রিভুজে বিভক্ত করেছি ; তারা ABC এবং ADC।	(7) A এবং C বিন্দু যোগ করবার ফলে আমরা ABCD চতুর্ভুজ-কে কটি ভাগে বিভক্ত করেছি এবং কি কি ?
(8) ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে AB=CD, AD=BC এবং AC সাধারণ বাহু।	(8) ABC এবং ADC ত্রিভুজ দুটির মধ্যে কি কি মিল আছে ?
(9) আমরা বলতেপারি যে ABC এবং ADC ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।	(9) এখন আমরা ABC এবং ADC ত্রিভুজদ্বয় সম্পর্কে কি বলতে পারি ?
(10) ∠ABC এবং ∠ACD কোণদ্বয় পরস্পর সমান এবং তারা একান্তর কোণ।	(10) তা হলে ∠BAC এবং ∠ACD কোন জাতীয় কোণ এবং তাদের মধ্যে সম্বন্ধ কি ?
(11) আমরা এই সিদ্ধান্তে আসতে পারি যে AB ও CD পরস্পর সমান্তরাল।	(11) এ থেকে কি সিদ্ধান্ত করা যায় ?
(12) এই কোণদ্বয় সমান ; এবং তারাও একান্তর কোণ।	(12) আমরা ∠DAC এবং ∠ACB কোণদ্বয় সম্বন্ধে আমরা কি বলতে পারি ?
(13) আমরা বলতে পারি যে AD এবং BC সমান্তরাল।	(13) তাহলে AD এবং BC এর মধ্যে সম্বন্ধ কি ?
(14) AB এবং CD সমান্তরাল, AD এবং BC সমান্তরাল।	(14) তাহলে AB ও CD এবং AD ও BC-র মধ্যে সম্বন্ধ কি ?
(15) আমরা বলতে পারি যে ABCD চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান (প্রদত্ত সর্তানুসারে) এবং তারা পরস্পর সমান্তরাল। অতএব ABCD একটি সামান্তরিক।	(15) তাহলে আমরা ABCD চতুর্ভুজ সম্বন্ধে কি বলতে পারি ?

এখন শিক্ষক সংশ্লেষণী পদ্ধতিতে ছাত্রদের সহায়তায় উপপাদ্যটী প্রমাণ করবেন।

উপস্থাপন : ABCD একটী চতুর্ভুজ। ইহার AB = CD ; AD = BC।

প্রমাণ করতে হবে যে ABCD একটী সামান্তরিক।

অংকন : AC যোগ করা হল।

প্রমাণ : ABC এবং ADC ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে

AB = CD ; AD = BC এবং AC সাধারণ বাহু।

∴ ABC এবং ADC ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

∴ $\angle BAC = \angle ACD$ এবং এরা একান্তর কোণ।

∴ AB ∥ CD।

আবার ∴ $\angle BCA = \angle CAD$ এবং এরা একান্তর কোণ।

∴ AD = BC

এক্ষনে যেহেতু AB ∥ CD ; AD ∥ BC

অতএব ABCD একটী সামন্তরিক। (প্রমাণিত)।

অভিযোজন : নবলব্ধ জ্ঞান ছাত্ররা ঠিকভাবে উপলব্ধি করেছে কিনা এবং নতুন ক্ষেত্রে প্রয়োগ করতে পারে কিনা পরীক্ষা করবার জন্য শিক্ষক মহাশয় নিম্নলিখিত শ্রেণীকাজ দেবেন এবং প্রয়োজন মত ছাত্রদের সহায়তা করবেন।

(1) প্রমাণ কর যে রম্বস একটি সামান্তরিক।

গৃহকাজ : পাঠ অনুশীলন এবং অভিজ্ঞতা দৃঢ় করবার জন্য শিক্ষক মহাশয় নিম্নলিখিত গৃহকাজ দেবেন।

"কোন চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমদ্বিখণ্ডিত হলে, তাহা একটী সামান্তরিক হবে।" সমস্যাটীর বিশ্লেষণী এবং সংশ্লেষণী প্রমাণ দুটী লিখে আনবে।

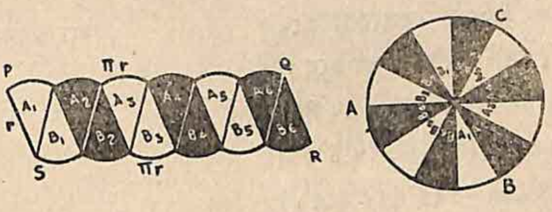
পাঠটীকা –15

মধ্যমগ্রাম উচ্চ (বহুমুখী) বিদ্যালয়
নবম শ্রেণী, 'ক' বিভাগ
ছাত্র সংখ্যা : ৪০ জন
গড় বয়স : ১৪+
সময় : ৪০ মিনিট
তারিখ : ৫।৪।৭৪
বিনয় কৃষ্ণ পাল

বিষয় : পরিমিতি
সাধারণ পাঠ : বৃত্ত
অদ্যকার পাঠ : বৃত্তের ক্ষেত্রফলের সূত্র নির্ণয় এবং সেই সূত্রের সাহায্যে বিভিন্ন সমস্যার সমাধান।

উদ্দেশ্য বৃত্তের ক্ষেত্রফলের সূত্র নির্ণয় এবং সূত্র প্রয়োগের মাধ্যমে ছাত্রদের যুক্তি, বিচার ও চিন্তা শক্তির বিকাশ সাধনে সহায়তা করা।

উপকরণ : চার্টে একটি বৃত্তের ছবি আঁকা আছে এবং এই বৃত্তটিকে কয়েকটি বৃত্তকলায় ভাগ করে পরস্পর বিপরীত কলাগুলিকে একই রঙে চিহ্নিত করা আছে। আবার এই বৃত্তটির উপর সমমাপের, সমরঙের এবং সমসংখ্যাকে বৃত্তকলা লিউকোপ্লাষ্ট দিয়ে এঁটে (যাতে পুনরায় খোলা যায়) সমক্ষেত্রফল বিশিষ্ট আর একটি বৃত্ত তৈরী করা আছে।



আয়োজন : ছাত্রদের পাঠে মনোযোগী করার জন্য শিক্ষক মহাশয় ছাত্রদের পূর্বজ্ঞানের ভিত্তিতে অদ্যকার পাঠের আনুসঙ্গিক নিম্নলিখিত কয়েকটি প্রশ্ন করবেন।

1. বৃত্ত কাকে বলে ?
2. আয়তক্ষেত্র কাকে বলে ?
3. আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কিভাবে নির্ণয় করা হয় ?
4. বৃত্তের পরিধি বলতে কি বোঝ এবং পরিধি নির্ণয়ের সূত্র কি ?
5, বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ কাকে বলে ?
5. π 'এর মান কত ?
7. বৃত্তকলা কাকে বলে ?
8. বৃত্ত যে জায়গা জুড়ে থাকে সেই জায়গাকে বৃত্তের কি বলে ?

পাঠঘোষণা : আজ আমরা বৃত্তের ক্ষেত্রফলের সূত্র নির্ণয় করব এবং সূত্রের সাহায্যে বিভিন্ন সমস্যা সমাধান করতে শিখব—এই বলে শিক্ষক মহাশয় শ্রেণীকক্ষে অদ্যকার পাঠঘোষণা করবেন।

উপস্থাপন : শিক্ষক মহাশয় চার্টে অংকিত বৃত্তটি এবং বৃত্ত কলাগুলিকে দেখাবেন এবং প্রশ্নোত্তরের মাধ্যমে ছাত্রদের সহায়তায় পাঠ পরিচালনা করবেন।

শিক্ষকের প্রশ্ন :	শিক্ষার্থীর উত্তর :
1. ABC কিরূপ ক্ষেত্র	বৃত্ত
2. ABC বৃত্তটিকে কয়েকটি ভাগে বিভক্ত করা আছে, এই এক একটি ভাগকে কি বলে ? (এই বার শিক্ষক মহাশয় বৃত্তকলা-গুলিকে তুলে এনে আর এক জায়গায় এমন ভাবে বসাবেন যাতে নবগঠিত PQRS ক্ষেত্রটি একটি আয়তাকার রূপ নেয়।)	বৃত্ত কলা
3. PQ ও RSকে সরলরেখা মনে করলে PQRS ক্ষেত্রটি কিরূপ ক্ষেত্র হবে ? (শিক্ষক মহাশয় ইঙ্গিত দেবেন যে PQ ও RS 'এর বৃত্ত চাপগুলিকে যত ছোট করা যাবে PQ ও RS রেখা ততই সরল হবে।)	আয়ত ক্ষেত্র হবে।
4. তাহলে PQ ও RSকে কি ভাবে সরলরেখায় পরিণত করা যাবে।	বৃত্তকলার সংখ্যা বাড়ালেই PQ ও RS সরলরেখায় পরিণত হবে।
5. অতএব PQRSকে আমরা কিরূপ ক্ষেত্র বলতে পারি ?	আয়ত ক্ষেত্র
6. ABC বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ r হলে পরিধি কত ?	$2\pi r$
7. PQRS আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ABC বৃত্তের পরিধির কত অংশ ?	পরিধির অর্দ্ধাংশ
8. তাহলে PQRS আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য কত ?	$\frac{1}{2}\times 2\pi r=\pi r$
9. PQRS আয়ত ক্ষেত্রের প্রস্থ ABC বৃত্তের কিসের সঙ্গে সমান ?	প্রস্থ বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধের সমান
10. তাহলে প্রস্থ কত ?	প্রস্থ $=r$
11. PQRS আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত ?	ক্ষেত্রফল $=\pi r\times r=\pi r^2$
12. ABC বৃত্তের ক্ষেত্রফল ও PQRS আয়ত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের মধ্যে সম্বন্ধ কি ?	বৃত্তের ক্ষেত্রফল ও আয়ত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমান।
13. তাহলে ABC বৃত্তের ক্ষেত্রফল কত ?	ABC বৃত্তের ক্ষেত্রফল $=\pi r^2$

এখন শিক্ষক মহাশয় বৃত্তের ক্ষেত্রফল $=\pi r^2$ এই সূত্রটি পরিষ্কার ভাবে বোর্ডে লিখে দিয়ে ছাত্রদের লিখে নিতে বলবেন এবং এই সূত্রের সাহায্যে প্রশ্নোত্তরের মাধ্যমে নিম্নলিখিত অংকটি কষে দেবেন এবং ছাত্রদের খাতায় লিখে নিতে বলবেন।

অংক : একটি বৃত্তের ব্যাস 14 সেন্টিমিটার হলে বৃত্তের ক্ষেত্রফল কত ?

শিক্ষকের প্রশ্ন :	**শিক্ষার্থীর উত্তর :**
বৃত্তটির ব্যাস কত ?	14 সেঃ মিঃ
∴ ব্যাসার্ধ কত ?	$\frac{1}{2}\times 14$ সেঃ মিঃ $=7$ সেঃ মিঃ
∴ বৃত্তটির ক্ষেত্রফল কত ?	$\pi r^2=\frac{22}{7}\times(7)^2$ $=22\times 7=154$ বর্গঃ সেঃ মিঃ

অভিযোজন : ছাত্রদের নবলব্ধজ্ঞান পরীক্ষার জন্য শিক্ষক মহাশয় নিম্নরূপ সমস্যাটী বোর্ডে লিখে দেবেন এবং ছাত্রদের সমাধান করতে বলবেন। শিক্ষক ছাত্রদের কাজ দেখবেন এবং প্রয়োজন মত ব্যক্তিগত সাহায্য করবেন।

অংক : যে বৃত্তাকার প্রাঙ্গনের ব্যাস 56 মিটার তা প্রতি বর্গমিটারে 25 পয়সা হিসাবে পাকা করতে কত খরচ হবে ?

বাড়ীর কাজ : শিক্ষক মহাশয় ছাত্রদের বাড়ী থেকে করে আনবার জন্য নিম্নরূপ অংকগুলি বোর্ডে লিখে দেবেন এবং ছাত্রদের লিখে নিতে বলবেন।

অংক 1. একটি বৃত্তের ক্ষেত্রফল 1 বর্গমিটার 54 বর্গ সেঃ মিঃ ; বৃত্তের পরিধি নির্ণয় কর।

অংক 2. একটি বলয়াকার ক্ষেত্রের বহির্বৃত্তের ব্যাসার্ধ 342 ফুট এবং অন্তর্বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ তার অর্দ্ধেক হলে, ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল কত ?

পাঠটীকা—16

বিদ্যালয়—উত্তর দমদম বালিকা বিদ্যাপীঠ
শ্রেণী—দশম
ছাত্রীসংখ্যা—40
গড় বয়স—15 +
সময়—40 মিনিট
তারিখ—18. 4. 74
শিক্ষিকা—ছন্দা বসু

বিষয়—স্থানাংক জ্যামিতি
বিশেষ পাঠ—সরলরেখা
পাঠক্রম—(ক) কোন অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়।
(খ) সরলরেখার প্রবণতার সংজ্ঞা
(গ) দুটি নির্দিষ্ট বিন্দু-সংযোজক সরলরেখার প্রবণতা নির্ণয়।
*(ঘ) যে সরলরেখা x-অক্ষের সঙ্গে কোন নির্দিষ্ট কোণে নত হয়ে y-অক্ষ থেকে কোন নির্দিষ্ট অংশ ছেদ করে তার সমীকরণ নির্ণয়।

উদ্দেশ্য—যে সরলরেখা x-অক্ষের সঙ্গে কোন নির্দিষ্ট কোণে নত এবং y-অক্ষ থেকে কোন নির্দিষ্ট অংশ ছেদ করে তার সমীকরণ স্থানাংকের সাহায্যে নির্ণয় করতে ছাত্রীদের সহায়তা করা এবং স্থানাংক জ্যামিতির প্রতি তাদের আগ্রহ সৃষ্টি করা।

উপকরণ—শ্রেণীকক্ষের সাধারণ উপকরণ। একটি বড় স্কেল।

আয়োজন—ছাত্রীদের মনকে আজকের পাঠের উপযোগী করার জন্য এই রকম প্রশ্ন করা হবে—

(১) (0,0), (2,5) এই বিন্দু দুটি গ্রাফ কাগজে এঁকে দেখাও। [শিক্ষিকা ঘুরে ঘুরে দেখবেন]

(২) সরলরেখা কাকে বলে ?

(৩) সরলরেখার প্রবণতা বল্‌তে কি বোঝ ?

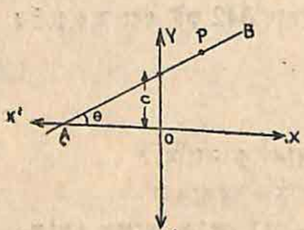
সরলরেখার সমীকরণ স্থানাংকের সাহায্যে কিভাবে নির্ণয় করা যাবে ?

পাঠঘোষণা—x-অক্ষের সঙ্গে নির্দিষ্ট কোণে নত এবং y-অক্ষ থেকে নির্দিষ্ট অংশ ছেদ করে এমন একটি রেখার সমীকরণ আজ আমরা নির্ণয় করব।

উপস্থাপন :

শিক্ষিকার করণীয় :

প্রথম পর্য্যায়—বোর্ডে বড় কোরে নিম্নের চিত্রটি আঁকতে হবে। ছাত্রদের সক্রিয় সহায়তায় প্রশ্নোত্তরের মাধ্যমে পাঠ ধীরে ধীরে এগোবে।



আমাদের AB রেখাটির সমীকরণ বার করতে হবে। AB রেখাটির সমীকরণ বলতে বোঝায় কোন একটি গতিশীল বিন্দুর সঞ্চারপথ। ধরি P এমন একটি বিন্দু ; অর্থাৎ P বিন্দুর সঞ্চার পথের সমীকরণই হবে আমাদের নির্ণেয় AB রেখার সমীকরণ।

এখন P বিন্দুর গতির সর্তদুটিকে অর্থাৎ θ ও C কে P বিন্দুর স্থানাংক দিয়ে প্রকাশ করতে পারলেই আমরা AB-র সমীকরণ পেতে পারি।

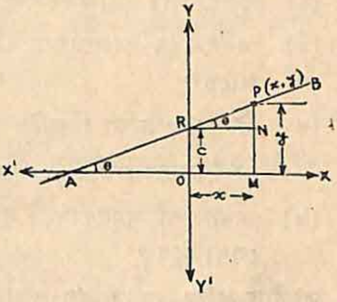
প্রথম পর্যায় পদ্ধতি : AB সরলরেখাটি x—অক্ষের সঙ্গে কি কোণ করে আছে ?

* AB সরলরেখাটি y-অক্ষ থেকে কত অংশ কেটে নিয়েছে ?
* AB সরলরেখার সমীকরণ বলতে কি বোঝ ?

* এখানে আমরা গতিশীল বিন্দুটির নাম কি দিয়েছি ?
* P বিন্দুর গতির কি সর্ত দেওয়া আছে ?
* ঐ সর্ত দুটির সাহায্যে AB রেখার সমাকরণ কিভাবে বার করা যাবে ?

শিক্ষিকার করণীয় :

দ্বিতীয় পর্য্যায়—এর পর নিম্নের চিত্রটি আঁকতে হবে—



চিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে যে, P বিন্দুর স্থানাংক (x, y) অর্থাৎ $OM = x$ এবং $PM = y$, আবার $RN = OM = x$

এবং $\angle PRN =$ অনুরূপ $\angle RAO = \theta$.

এখন $PN = PM - NM$

$= y - RO$

$= y - C$

এখন আমরা চিত্র থেকে বুঝতে পারছি যে, θ ও C কে P বিন্দুর স্থানাংক (x,y) দিয়ে প্রকাশ করতে গেলে $\tan\theta$ কোণানুপাতকে নিতে হবে।

PRN ত্রিভুজ থেকে পাই $\tan\theta = \frac{PN}{RN}$ অর্থাৎ $\tan\theta = \frac{y-c}{x}$

অথবা $y - c = x \tan\theta$

AB রেখার প্রবণতাকে m ধরলে লেখা যায় $\tan\theta = m$

সুতরাং $y - c = mx$

বা $y = mx + c$ এবং এই সমীকরণটিই হল P বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ অর্থাৎ নির্ণেয় AB সরলরেখার সমীকরণ।

দ্বিতীয় পর্য্যায় পদ্ধতি—চিত্রটি দেখে বল P বিন্দুর স্থানাংক কত ?

* OM এবং RN = কত ?
* PM = কত ?
* PN = কত ?
* $\angle RAO$ এবং $\angle PRN$ – এর মধ্যে সম্পর্ক কি ?
* θ ও C কে x, y দিয়ে প্রকাশ করতে হলে PRN ত্রিভুজের কোন্ কেণানুপাতটি নিতে হবে ?
* এখানে $\tan\theta =$ কত হচ্ছে ?

~ $\tan\theta = m$ ধরলে নতুন সমীকরণটি কি হবে ?

* তাহলে P বিন্দুর স্থানাংক দিয়ে P বিন্দুর গতির সর্তকে প্রকাশ করলে কি দাঁড়াচ্ছে ?

এখন P বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ কি দাঁড়াল ?

* তাহলে AB সরলরেখার সমীকরণই বা কি দাঁড়াল ?

অভিযোজন—ছাত্রীরা আজকের পাঠ কতখানি বুঝেছে তা পরীক্ষা করার জন্য নিম্নের প্রশ্নগুলি করা হবে।

(১) সরলরেখার সমীকরণ বলতে কি বোঝ ?

(২) এখানে যে সরলরেখার সমীকরণ বার করতে হবে তার কি কি সর্ত দেওয়া আছে ?

(৩) ঐ সর্ত্তগুলিকে বিন্দুটির স্থানাংকের সাহায্যে প্রকাশ করলে সমীকরণটি কি দাঁড়াবে ?

(৪) এখন এই সরলরেখাটি মূল বিন্দু (0,0) গামী হলে সমীকরণটিকে কিভাবে লেখা হবে ?

বাড়ীর কাজ—আজকের পড়াটি ছাত্রীদের বাড়ী থেকে ভালভাবে পড়ে আসতে ও ছবির সাহায্যে লিখে আনতে বলা হবে।

পাঠটীকা—17

বিদ্যালয়—বিরাটী উচ্চ বিদ্যালয়
শ্রেণী—দশম
ছাত্রসংখ্যা—40
গড় বয়স—15 +
সময়—40 মিনিট
তারিখ—20. 4. 74
শিক্ষক—তাপস পাল

বিষয়—ত্রিকোণমিতি
বিশেষ পাঠ—কোণানুপাত
পাঠক্রম—(ক) কোণানুপাতের সংজ্ঞা ও কোণানুপাতগুলির পরস্পর সম্বন্ধ
(খ) ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সম্বন্ধীয় অভেদাবলী ও সমাধান
*(গ) 30° কোণের কোণানুপাত নির্ণয়
(ঘ) 45° ,, ,, ,,
(ঙ) 60° ,, ,, ,,
(চ) 0° ,, ,, ,,
(ছ) 90° ,, ,, ,,
অদ্যকার পাঠ * চিহ্নিত

উদ্দেশ্য—ছাত্রদের 30° কোণের কোণানুপাত নির্ণয় করতে সাহায্য করা এবং ত্রিকোণমিতির প্রতি তাদের আগ্রহের সৃষ্টি করা।

উপকরণ—শ্রেণীকক্ষের সাধারণ উপকরণ ছাড়া ব্ল্যাকবোর্ডের উপযোগী স্কেল ও চাঁদা।

আয়োজন—আজকের পাঠে ছাত্রদের মনকে আকৃষ্ট করার জন্য এই প্রশ্নগুলি করা হবে :

(১) কোণানুপাত বলতে কি বোঝ ? ছবির সাহায্যে বোঝাও। [শিক্ষিকা ঘুরে ঘুরে দেখবেন]

ABC ত্রিভুজের C কোণটির বাহুর ভিত্তিতে কটি কোণানুপাত হতে পারে এবং সেগুলি কি কি ? [ত্রিভুজটী বোর্ডে আঁকা হবে]

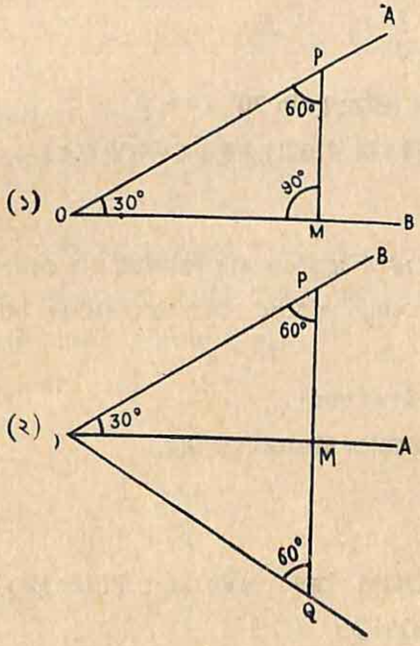
(৩) Sin θ-র সঙ্গে Cosec θ র সম্পর্ক কি ?

পাঠঘোষণা—আমরা আজ 30° কোণের কোণানুপাতগুলি নির্ণয় করব।

উপস্থাপন :

শিক্ষকের করণীয়

প্রথম পর্যায় : চাঁদা ও স্কেলের সাহায্যে বোর্ডে ১নং চিত্রানুযায়ী বড় করে



∠AOB = 30° আঁকতে হবে। এরপর অধিকাংশ ছাত্রের সক্রিয় সহায়তায় প্রশ্নোত্তরের মাধ্যমে পাঠ ধীরে ধীরে এগোবে।

AOB কোণটির কোণানুপাতগুলি নির্ণয় করতে হলে AOB কোণটিকে একটি সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণে পরিণত করতে হবে এবং তার জন্য **OA**-র ওপর একটি যে কোন বিন্দু **P** নিয়ে OB-র ওপর PM লম্ব টানতে হবে।

১নং চিত্র থেকে বোঝা যাচ্ছে যে, $\angle OPM = 60^\circ$ এবং $\angle PMO = 90^\circ$

এখন $\sin 30^\circ = \frac{PM}{OP}$ এবং $\sin 30^\circ$-র কোন নির্দিষ্ট মান আমরা পাচ্ছি না। এর জন্য OPM ত্রিভুজের বাহু তিনটিকে নির্দিষ্ট মানের অনুপাতে প্রকাশ করা প্রয়োজন।

প্রথম পর্যায়ের পদ্ধতি

- এখানে কোন্ কোণের কোণানুপাত নির্ণয় করতে হবে ?
- $\angle AOB =$ কত নেওয়া হয়েছে ?
- $\angle AOB$-এর কোণানুপাতগুলি নির্ণয়ের জন্য কি অংকনের দরকার বলে মনে কর ?
- $\angle OPM =$ কত ?
- $\angle PMO =$ কত ?
- বাহুর অনুপাতের ভিত্তিতে $\sin 30^\circ =$ কত ?
- $\sin 30^\circ$-র নির্দিষ্ট মান পাওয়ার জন্য কি করতে হবে ?

শিক্ষিকার করণীয় :

দ্বিতীয় পর্যায় :—OPM ত্রিভুজের বাহু তিনটিকে যদি কেবলমাত্র একটি বাহুর অনুপাতে প্রকাশ করা যায়, তাহলেই কোণানুপাতগুলির নির্দিষ্ট মান পাওয়া সম্ভব হবে।

এর জন্য ২নং চিত্রটি আঁকা হবে।

PMকে Q পর্য্যন্ত এমনভাবে বাড়ানো হল যেন,

$MQ = PM$ হয়।

QO যোগ করা হল।

এখন POM এবং QOM ত্রিভুজ দুটির মধ্যে $PM = MQ$, $OM =$ সাধারণ বাহু এবং $\angle OMP = \angle OMQ$।

$\therefore$ ত্রিভুজ দুটি সর্বসম।

$\therefore \angle QOM = 30^\circ$, $\quad \therefore \angle POQ = 60^\circ$

$\therefore$ OPQ একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

$\therefore \quad PO = PQ = 2PM$

$\therefore \quad PM = \frac{1}{2} OP$

আবার $OM^2 = OP^2 - PM^2$

$= OP^2 - (\frac{1}{2} OP)^2$

$= OP^2 - \frac{1}{4} OP^2$

$= \frac{3}{4} OP^2$

$\therefore \quad OM = \frac{\sqrt{3}}{2} OP.$

দ্বিতীয় পর্যায়ের পদ্ধতি

* Pকে Q পর্যন্ত কতটা বাড়ানো হল ?
* POM এবং QOM ত্রিভুজ দুটির মধ্যে কি কি সমান হচ্ছে ?
* ত্রিভুজ দুটির মধ্যে সম্পর্ক কি দাঁড়াল ?
* $\angle QOM$ = কত ?
* $\angle POQ$ = কত ?
* $\angle OQP$ = কত ?
* POQ ত্রিভুজটিকে কি রকম ত্রিভুজ বলা হবে ?
* PM এবং OP-এর মধ্যে সম্পর্ক কি ?
* PMকে কোন্ বাহুর অনুপাতে প্রকাশ করা হল ?
* OMকে কোন্ বাহুর অনুপাতে প্রকাশ করা হয়েছে ?
* OM এবং OP-র মধ্যে সম্পর্ক কি দাঁড়াল ?

শিক্ষিকার করণীয় ঃ

তৃতীয় পর্যায় :—

$\therefore \quad \text{Sin } 30^\circ = \frac{PM}{OP} = \frac{\frac{1}{2}OP}{OP} = \frac{1}{2}$

সুতরাং $\text{cosec } 30^\circ = \frac{1}{\sin 30^\circ} = 2$

$\cos 30^\circ = \frac{OM}{OP} = \frac{\frac{\sqrt{3}\ OP}{2}}{OP} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

সুতরাং $\sec 30^\circ = \frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$$\tan 30^\circ = \frac{PM}{OM} = \frac{\frac{1}{2}\,OP}{\frac{\sqrt{3}\,OP}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

সুতরাং $\cot 30^\circ = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}$

তৃতীয় পর্যায়ের পদ্ধতি

* এখন $\sin 30^\circ =$ কত হল ?
* সুতরাং $\operatorname{cosec} 30^\circ =$ কত ?
* আবার $\cos 30^\circ =$ কত হল ?
* সুতরাং $\sec 30^\circ =$ কত ?
* $\tan 30^\circ =$ কত ?
* $\cot 30^\circ =$ কত ?

শিক্ষিকার করণীয় ঃ

চতুর্থ পর্যায় ঃ—এরপর ছাত্রদের সহায়তায় 30° কোণের কোণানুপাতগুলি তালিকার আকারে একসঙ্গে সাজিয়ে এইভাবে বোর্ডে লেখা হবে।

sin 30°	$\frac{1}{2}$
cos 30°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
tan 30°	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
cot 30°	$\sqrt{3}$
sec 30°	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
cosec 30°	2

অভিযোজন ঃ—আজকের পড়া ছাত্ররা কতটা বুঝেছে তা জানবার জন্য নীচের প্রশ্নগুলি করা হবে।

(১, 30°-র কোণানুপাতগুলি নির্ণয় করার জন্য কি রকম চিত্র অংকন করা হয়েছে ?

(২) PM এবং OMকে কোন বাহুর অনুপাতে প্রকাশ করা হয়েছে ?

(৩) 30°-র কোণানুপাতগুলি কত বেরিয়েছে ?

বাড়ীর কাজ :—আজকের পড়াটি ছেলেদের বাড়ী থেকে ভালভাবে তৈরী হয়ে আসতে এবং ছবিসহ কোণানুপাতগুলি নির্ণয় করে আনতে বলা হবে।

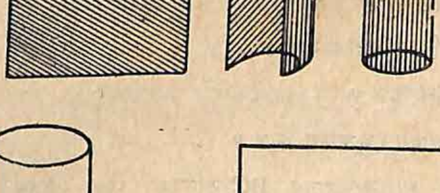
পাঠটীকা—18

বিদ্যালয়—নব বারাকপুর উচ্চতর বালিকা বিদ্যালয়।
শ্রেণী—দশম
ছাত্রী সংখ্যা—৪০
গড় বয়স—১৫ +
সময়—৪০ মিনিট
তারিখ—৯.৪.৭৪
শিক্ষিকা—অনসূয়া চক্রবর্তী

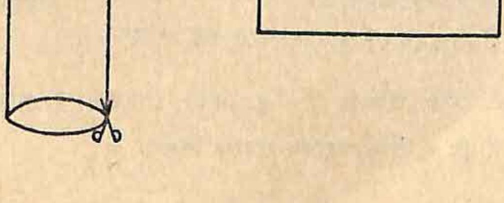
বিষয়—পরিমিতি
সাধারণ পাঠ—লম্ব বৃত্তাকার চোঙ।
বিশেষ পাঠ—লম্ব বৃত্তাকার চোঙের বক্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল, সমতলের ক্ষেত্রফল ও তৎসম্পর্কীয় সমস্যার সমাধান।
অভ্যকার পাঠ—ঐ

উদ্দেশ্য :—লম্ব বৃত্তাকার চোঙের বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল, সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় ও প্রয়োগের মাধ্যমে ছাত্রীদের চিন্তা, বিচার ও পর্যবেক্ষণ শক্তির উন্মেষসাধনে সহায়তা করা।

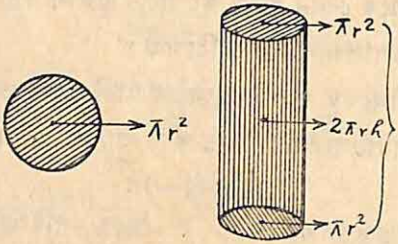
উপকরণ :—একটি আয়তক্ষেত্রাকার কাগজের টুকরো, একটি পিসবোর্ডের তৈরী লম্ব বৃত্তাকার চোঙ ও দুটি বৃত্তের মডেল, একটি কাঁচি ও শ্রেণীকক্ষের সাধারণ উপকরণসমূহ।



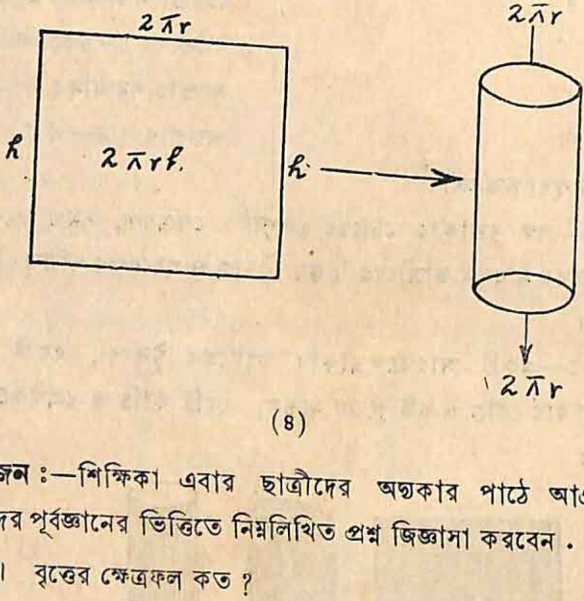
(১)



(২)



(৩)



(৪)

আয়োজন :—শিক্ষিকা এবার ছাত্রীদের অদ্যকার পাঠে আগ্রহী করবার উদ্দেশ্যে তাদের পূর্বজ্ঞানের ভিত্তিতে নিম্নলিখিত প্রশ্ন জিজ্ঞাসা করবেন .

১। বৃত্তের ক্ষেত্রফল কত ?

২। বৃত্তের পরিধি সমান কত ?

৩। π এর মান কত ?

৪। আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত ?

৫। ABCD আয়তক্ষেত্রের BC বাহুকে স্থির রেখে তার চতুর্দিকে আয়তক্ষেত্রটিকে একবার ঘোরালে কি ধরণের ক্ষেত্র প্রস্তুত করে ? (শিক্ষিকা আয়তক্ষেত্রাকার একটি চিত্র বোর্ডে অংকন করে প্রশ্ন করবেন)।

পাঠ ঘোষণা :—আজ আমরা লম্ব বৃত্তাকার চোঙের বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল, সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় ও তার প্রয়োগ করতে শিখব।

উপস্থাপন :—শিক্ষিকা উপকরণের সহায়তায় প্রশ্নোত্তরের মাধ্যমে নিম্নলিখিত উপায়ে অদ্যকার পাঠ্যবিষয় উপস্থাপন করবেন :—

শিক্ষিকার করণীয়	প্রশ্নাবলী
(প্রশ্নানুসারে মডেল প্রস্তুত করবেন ১ নং চিত্র অনুযায়ী)	১। কোনও আয়তক্ষেত্রের আকারে কাটা এক টুকরো কাগজকে গোল ক'রে মুড়লে কি ধরণের ক্ষেত্রফল প্রস্তুত করা যায় ?
	২। চোঙটির কোন্ অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে হবে ?
	৩। চোঙটির বক্রপৃষ্ঠতল ও সমগ্রতল বলতে কি বোঝ ?
	৪। চোঙটির বক্রপৃষ্ঠতল কোন্ ক্ষেত্র থেকে উৎপন্ন করা হয়েছে ?
(২ং চিত্রানুযায়ী শিক্ষিকা চোঙটির গায়ে আঁকা লম্ব রেখা বরাবর কাঁচি দিয়ে কেটে দেখাবেন)	৫। কিভাবে চোঙটির বক্রপৃষ্ঠতলকে একটি আয়তক্ষেত্রে পরিণত করা যায় ?
	৬। আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফলের সঙ্গে চোঙটির বক্রপৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফলের সম্পর্ক কি ?
	৭। আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ চোঙটির কোন্ কোন্ এককের সঙ্গে সমান ?
	৮। বৃত্তাকার তল বা ভূমির ব্যাসার্দ্ধ r হলে বৃত্তাকার তলের পরিধি কত ?
(৩নং চিত্রের পরিপ্রেক্ষিতে শিক্ষিকা আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $=2\pi r \times h$ বর্গ একক $=2\pi rh$ বর্গ একক বোর্ডে করে দেখাবেন)	৯। বৃত্তাকার তলের পরিধি $2\pi r$ ও চোঙটির উচ্চতা h হলে চোঙটির বক্র-পৃষ্ঠ তলের সমান আয়তনের আয়ত-ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল কত ?
	১০। সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে আর কোন্ তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় বাকী রইল ?

শিক্ষিকার করণীয়

(বৃত্তাকার তলের ক্ষেত্রফল πr^2 বর্গ একক বোর্ডে লিখবেন)

($\pi r^2 + \pi r^2 = 2\pi r^2$ বর্গ এককটীও বোর্ডে লিখে দেখাবেন এবং ৪নং চিত্রটী অনুধাবন করতে বলবেন)

(সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল

= বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল

+ বৃত্তাকার তলদুটির ক্ষেত্রফল

$= 2\pi rh$ বর্গ একক

$+ 2\pi r^2$ বর্গ একক

$= 2\pi r(h+r)$ বর্গ একক

বোর্ডে লিখবেন ও ছাত্রীদের খাতায় লিখে নিতে বললেন।)

প্রশ্নাবলী

১১। বৃত্তাকার তলের ক্ষেত্রফল কত ?

১২। চোঙটিতে এ ধরণের কয়টি বৃত্তাকার তল আছে এবং তাদের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি কত ?

১৩। এখন তাহলে লম্ব বৃত্তাকার চোঙটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল কত হল ?

এবার শিক্ষিকা ছাত্রীদের সহায়তায় প্রশ্নোত্তরের মাধ্যমে নিম্নলিখিত সমস্যাটি বোর্ডে সমাধান করে দেবেন।

সমস্যা :—

একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের উচ্চতা 9 মিটার ও ভূমির ব্যাসার্দ্ধ 1·75 মিটার। চোঙটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল কত ?

সমাধান :—

$2\pi r(h+r)$ বর্গ একক

$= 2.\frac{22}{7}.1{\cdot}75.(9+1{\cdot}75)$ বর্গ মিটার

$= 44 \times {\cdot}25\ (10{\cdot}75)$ বর্গ মিটার

$= 11{\cdot}00 \times 10{\cdot}75$ বর্গ মিটার

$= 118{\cdot}25$ বর্গ মিটার

১। লম্ব বৃত্তাকার চোঙের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল কত ?

২। এই $2\pi r(h+r)$ এ π, r, h এর মান বসিয়ে কত পাই ?

৩। তাহলে লম্ব বৃত্তাকার চোঙের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল কত ?

অভিযোজন : ছাত্রীরা অদ্যকার পাঠ কতটা আয়ত্ব করেছে সেটা পরীক্ষা করার জন্য শিক্ষিকা নিম্নলিখিত সমস্যা ক'টি শ্রেণীতে সমাধান করতে দেবেন এবং প্রয়োজনবোধে ব্যক্তিগত সাহায্য করবেন।

সমস্যা ১। 8 মিটার দীর্ঘ একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল 2464 বর্গ মিটার হলে ঐ চোঙটির ভূমির ব্যাসার্দ্ধ কত ?

সমস্যা ২। একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ভূমির পরিধি 4 মি. 7 ডেসিমি. এবং উচ্চতা 12 মি.। চোঙটির বক্রপৃষ্ঠ তলের ক্ষেত্রফল কত ?

গৃহকাজ : শিক্ষিকা এবার নিম্নলিখিত সমস্যা কটির সমাধান ছাত্রীদের বাড়ী থেকে ক'রে আনতে বলবেন।

সমস্যা ১। একটি চোঙের শীর্ষতল দুটির ব্যাস 2 মিটার 8 ডেসিমিটার। শীর্ষতলদুটির ক্ষেত্রফল কত ?

সমস্যা ২। একটি 12 সেন্টিমিটার উচ্চতাবিশিষ্ট লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ভূমির ব্যাস 7 সেন্টিমিটার। চোঙটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল কত ?

সমস্যা ৩। একটি চোঙসদৃশ স্তম্ভের উচ্চতা 14 মিটার এবং ইহার বক্রপৃষ্ঠ তলের ক্ষেত্রফল 264 বর্গ মিটার। স্তম্ভের ভূমির ব্যাসার্দ্ধ কত ?

পাঠটীকা—19

বিদ্যালয় : বিরাটী হাইস্কুল।
শ্রেণী : দশম
ছাত্র সংখ্যা : ৪০
গড় বয়স : ১৫ +
সময় : ৪০ মিনিট
শিক্ষক : অমিয় কান্তি দাস॥
তাং : ২৫.৪.৭৪

বিষয় : স্থানাঙ্ক জ্যামিতি
বিশেষ পাঠ : বৃত্ত ও স্পর্শক
অন্তকার পাঠ : কেন্দ্র মূলবিন্দুতে ও ব্যাসার্দ্ধ r বিশিষ্ট বৃত্তের পরিধিস্থ (x_1,y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় ও প্রয়োগ।

উদ্দেশ্য : ব্যাসার্দ্ধ r বিশিষ্ট ও কেন্দ্র মূলবিন্দুতে—বৃত্তের পরিধিস্থ $(x_1.y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ স্থানাঙ্কের সাহায্যে নির্ণয়ের মাধ্যমে ছাত্রদের যুক্তি, চিন্তা ও বিশ্লেষণী ক্ষমতার বিকাশ সাধন করে, স্থানাঙ্ক জ্যামিতি পাঠে আগ্রহ সৃষ্টি করা।

উপকরণ : শ্রেণীকক্ষের সাধারণ সাজ-সরঞ্জাম।

আয়োজন : পূর্বজ্ঞান পরীক্ষা ও অন্তকার পাঠে মন আকৃষ্ট করবার জন্য শিক্ষিকা-শ্রেণীকক্ষে নিম্নলিখিত প্রশ্নের অবতারণা করা হবে।

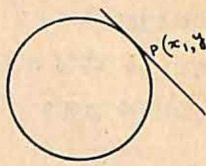
(১) স্পর্শক কাকে বলে ?

(২) জ্যা কাকে বলে ?

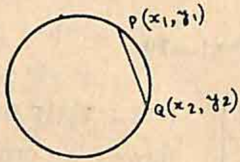
(৩) (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ কি হবে ?
(বোর্ডে চিত্র অঙ্কন করে)

পাঠ ঘোষণা : "আজ আমরা যে বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দুতে ও ব্যাসার্দ্ধ 'r' বিশিষ্ট বৃত্তের পরিধিস্থ (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করব ও প্রয়োগ করতে শিখব।"

উপস্থাপন : শিক্ষক মহাশয় ছাত্রদের সাহায্যে প্রথমে ১নং চিত্র এঁকে প্রশ্নোত্তরের মাধ্যমে বিষয়বস্তুটি উপস্থাপনের চেষ্টা করবেন।



(২)



(১)

শিঃ প্রঃ—(১) বৃত্তটির কেন্দ্র কোথায় ও তার স্থানাঙ্ক কত ?

ছাঃ উঃ—মূলবিন্দুতে ; $(0,0)$;

শিঃ প্রঃ—(২) ব্যাসার্দ্ধ=কত ?

ছাঃ উঃ—'r'

শিঃ প্রঃ—(৩) ঐ বৃত্তের সমীকরণ কি হবে ?

ছাঃ উঃ—$x^2+y^2=r^2$

শিঃ প্রঃ—(৪) কোন্ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে ও তার স্থানাঙ্ক কি হবে ?

ছাঃ উঃ—$P(x_1, y_1)$

[বিন্দুটি পরিধিতে স্থাপন করবেন।]

পরিধিতে $Q(x_2, y_2)$ বিন্দু স্থাপন করে প্রশ্ন করবেন :

শিঃ প্রঃ—(৫) $P(x_1, y_1)$ ও $Q(x_2, y_2)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ কি হবে ?

ছাঃ প্রঃ—$y-y_1=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)\cdots\cdots(1)$

শিঃ প্রঃ—(৬) $P(x_1,y_1)$ ও $Q(x_2,y_2,)$ বৃত্তের পরিধিস্থ হওয়ায় বৃত্তের সমীকরণকে কি করা উচিত ?

ছাঃ উঃ—সিদ্ধ (Satisfy) করা উচিত।

শিঃ প্রঃ—(৭) তাহ'লে আমরা কি পাই ?

ছাঃ উঃ— $x_1{}^2+y_1{}^2=r^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$

$x_2{}^2+y_2{}^2=r^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$

শিঃ প্রঃ—(৮) এখন (2) ও (3) বিয়োগ করলে অবস্থা কি দাঁড়ায় ?

ছাঃ উঃ— $(x_1{}^2-x_2{}^2)+(y_1{}^2-y_2{}^2)=o.$

or, $(x_1-x_2)(x_1+x_2)+(y_1-y_2)(y_1+y_2)=o.$

or, $(y_1-y_2)(y_1+y_2)=-(x_1+x_2)(x_1-x_2)$

or, $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{-(x_1+x_2)}{(y_1+y_2)}\ \ldots(4)$

শিঃ প্রঃ—(৯) PQ জ্যার সমীকরণ পেতে হলে কি করা উচিত ?

ছাঃ উঃ— (1) তে $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ এর মান (4) থেকে বসান উচিত।

শিঃ প্রঃ—(১০) (1) ও (4) থেকে PQ জ্যার সমীকরণ কিরূপে লেখা যায় ?

ছাঃ উঃ— $y-y_1=\frac{-(x_1+x_2)}{(y_1+y_2)}(x-x_1)\ \ldots(5)$

শিঃ প্রঃ—(১১) কখন PQ জ্যা P বিন্দুতে স্পর্শকে পরিণত হবে ?

ছাঃ উঃ—Q বিন্দু P-এর উপর সমপাতিত হলে।

[শিক্ষক মহাশয়, ২নং চিত্রানুযায়ী এখন বোর্ডে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক চিহ্নিত করে P বিন্দুতে স্পর্শক আঁকবেন অর্থাৎ Q বিন্দুকে P বিন্দুর উপর সমপাতিত করবেন।]

শিঃ প্রঃ—(১২) Q বিন্দু P-এর উপর সমপাতিত হওযায় স্থানাঙ্কের আকারে স্পর্শকের সমীকরণ কি ভাবে পাওয়া যাবে ?

ছাঃ উঃ—x_2-এর স্থলে x_1 ও y_2-এর স্থলে y_1 লিখলে।

শিঃ প্রঃ—(১৩) তাহ'লে PQ-এর সমীকরণ অর্থাৎ (5) এর আকার কিরূপ হবে ?

[বোর্ডে লিখে দেখাবেন]

ছাঃ উঃ—

$$y-y_1=\frac{-(x_1+x_1)}{(y_1+y_1)}(x-x_1)$$

$$=\frac{-2x_1}{2y_1}(x-x_1)$$

$$\text{or,}\quad yy_1-y_1^2=-xx_1+x_1^2$$

$$\text{or,}\quad xx_1+yy_1=y_1^2+x_1^2$$

শিঃ প্রঃ—(১৪) ∴ (x_1, y_1) বৃত্তের পরিধিস্থ বিন্দু, তাহ'লে $xx_1+yy_1=x_1^2+y_1^2$ সমীকরণটিতে $x_1^2+y_1^2$-এর স্থলে কি লেখা যেতে পারে?

[বোর্ডে লিখে দেখাবেন]

ছাঃ উঃ—xx_1+yy_1

$$=x_1^2+y_1^2$$

$$=r^2$$

শিঃ প্রঃ ১৫। সুতরাং (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ কি হল?

ছাঃ উঃ $xx_1+yy_1=r^2$

[এখন শিক্ষক মহাশয় ছাত্রদের সূত্রটি লিখে নিতে বলবেন ও তাদের সহায়তায় একটি অঙ্ক বোর্ডে কষবেন :]

সমস্যা: যে বৃত্তের কেন্দ্র (0, 0) ব্যাসার্দ্ধ 6, উহার পরিধিস্থ $(-2\sqrt{5}, 4)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

শিঃ প্রঃ	**ছাঃ উঃ**
১। বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক কি?	(0, 0)
২। বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ কত?	6
৩। তাহ'লে বৃত্তের সমীকরণ কি হবে?	$x^2+y^2=36$
৪। এ ক্ষেত্রে $x_1=?$	$-2\sqrt{5}$
৫। এ ক্ষেত্রে $y_1=?$	4
৬। $xx_1=?$	$x(-2\sqrt{5})$
৭। $yy_1=?$	$y(4)$
৮। স্পর্শকের সমীকরণ কি হবে?	$x(-2\sqrt{5})+y.4=36$ or, $-2\{(x\sqrt{5})-2y\}=36$ or, $\sqrt{5}x+2y+18=0$

অভিযোজনঃ—ছাত্রদের নবলব্ধ পাঠ কতখানি আয়ত্ত হয়েছে তা জানবার জন্য শিক্ষক মহাশয় শ্রেণী কক্ষে নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলি করবেন ও প্রয়োজনবোধে ব্যক্তিগত সহায়তা করবেন।

১। $x^2+y^2=16$ এই বৃত্তের $(3, \sqrt{7})$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

২। যে বৃত্তের কেন্দ্র মূল বিন্দুতে ও $(\text{ব্যাসার্দ্ধ})^2=25$, উহার (3, 4) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

বাড়ীর কাজঃ—১। ছাত্রদের, চিত্রসহযোগে, $x^2+y^2=r^2$ এই বৃত্তের (α, β) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করে আনতে বলা হবে।

২। $x^2+y^2=25$ এই বৃত্তের (0, 5) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

৩। $x^2+y^2=18$ এই বৃত্তের (3, 3) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

পাঠ-টীকা—20

বিদ্যালয়—নব-বারাকপুর উচ্চ-বালিকা বিদ্যালয়
শ্রেণী – দশম
ছাত্রীসংখ্যা—৪০
গড়বয়স—১৫ +
সময়—৪০ মিঃ
তারিখ—১৩. ৪. ৭৪
শিক্ষিকা—গীতা ভট্টাচার্য্য

বিষয়—ত্রিকোণমিতি।
বিশেষ পাঠ—উচ্চতা ও দূরত্ব।
পাঠক্রম ঃ—
(ক) অনুভূমিক তলের উপর অবস্থিত বস্তুর দিকে কিছুদূর যাওয়া সম্ভব—এরূপ দুর্গম বস্তুর উচ্চতা নির্ণয়।
*(খ) অনুভূমিক তলের উপর বস্তুর দিকে যাওয়া সম্ভব নয়—এরূপ অগম্য দূরত্বে অবস্থিত বস্তুর উচ্চতা নির্ণয়।
অদ্যকার পাঠ * চিহ্নিত।

উদ্দেশ্য—অগম্য দূরত্বে অবস্থিত বস্তুর উচ্চতা নির্ণয় করতে ছাত্রীদের সাহায্য করা এবং ত্রিকোণমিতির প্রতি তাদের আগ্রহের সৃষ্টি করা।

উপকরণ—বোর্ডের উপযোগী একটি স্কেল ও শ্রেণীকক্ষের সাধারণ উপকরণ।

আয়োজন—আজকের আলোচনার বিষয়ে ছাত্রীদের আগ্রহ সৃষ্টি করার জন্য পূর্বজ্ঞানের ভিত্তিতে এই প্রশ্নগুলি করা হবে।

(১) উন্নতি কোণ কাকে বলে? (ছবি এঁকে দেখাবেন)

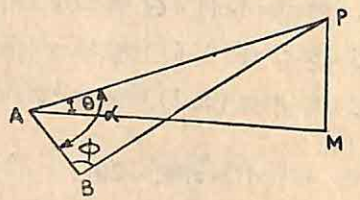
(২) অবনতি কোণ বলতে কি বোঝ ?

(৩) উচ্চতা, দূরত্ব বিষয়ক কোন সমস্যায় দর্শক যখন দূরবর্তী কোন বস্তুর উন্নতি কোণ বা অবনতি কোণ লক্ষ্য করে, তখন সাধারণতঃ কি ধরে নেওয়া হয় ?

পাঠঘোষণা—আজ আমরা অনুভূমিক তলের ওপর দিয়ে বস্তুর দিকে যাওয়া অসুবিধাজনক এমন কোন বস্তুর উচ্চতা নির্ণয় করব।

উপস্থাপন ঃ

শিক্ষিকার করণীয়—বোর্ডে এই চিত্রটি আঁকা হবে।



PM একটি বস্তু (পাহাড় বা অন্য কিছু)। A অনুভূমিক তলের উপর অগম্য দূরত্বে অবস্থিত একটি বিন্দু। P বিন্দুর উন্নতি কোণ PAM $=\phi$ (ধরি)।

এখানে PM বস্তুর দিকে যেহেতু অগ্রসর হওয়া যাচ্ছে না, অতএব অন্য কোন সুবিধাজনক দিকে গিয়ে আর একটি কৌণিক পরিমাপ নেওয়া যেতে পারে।

এখন AB $=a$ এই দূরত্ব যাওয়া হ'ল এবং B বিন্দু থেকে P এর উন্নতি কোণ PBA $=\phi$ ধরি।

ছবি থেকে বোঝা যাচ্ছে যে, দুটি কৌণিক পরিমাপের সাহায্যে PM-এর উচ্চতা নির্ণয় করা যায় না। এরজন্য আর একটি কৌণিক পরিমাপ নেওয়া দরকার ; A বিন্দুতে এই পরিমাপ নিলে PM র উচ্চতা নির্ণয় করা সহজ হবে।

ধরি, $\angle PAB=\alpha$,

এখন $\angle APB=180^\circ-(\alpha+\phi)$

আবার PAM ত্রিভুজ থেকে পাই $\text{Sin}\alpha=\frac{PM}{AP}$ অর্থাৎ $PM=AP\ \text{Sin}\ \alpha$. (1)

আবার APB ত্রিভুজ থেকে পাই,

$$\frac{AP}{\text{Sin}\ \phi}=\frac{AB}{\text{Sin}\ [180-(\alpha+\phi)]}\quad or\quad \frac{AP}{\text{Sin}\ \phi}=\frac{a}{\text{Sin}\ (\alpha+\phi)}$$

$$or \quad AP = \frac{a \text{ Sin } \phi}{\text{Sin } (\alpha + \phi)}$$

(1) থেকে পাই $PM = AP \text{ Sin } \alpha$

অর্থাৎ $PM = \dfrac{a \text{ Sin } \alpha \text{ Sin } \phi}{\text{Sin } (\alpha + \phi)}$

বা, $PM = a \text{ Sin } \alpha \text{ Sin } \phi \text{ Cosec } (\alpha + \phi)$

পদ্ধতি :

* এখানে বস্তু কোনটি ?
* বস্তুটি কি রকম ?
* বস্তুটি থেকে অগম্য দূরত্বে কোন্ বিন্দুটি নেওয়া হয়েছে ?
* P বিন্দুর উন্নতি কোণ কত ধরা হয়েছে ?
* এখন PM বস্তুর দিকে অগ্রসর হওয়া সম্ভব নয় কেন ?
* PM দূরত্ব নির্ণয়ের জন্য এবার কি করতে হবে ?
* A থেকে B বিন্দুর দূরত্ব কত ধরা হয়েছে ?
* ছবি দেখে বল B বিন্দুতে P-র উন্নতি কোণ কত হবে ?
* এবার বল দুটি কৌণিক পরিমাপের সাহায্যে কি ভাবে আমরা PM-র উচ্চতা পাব ?
* তা হলে কি করতে হবে ?
* APB ত্রিভুজ থেকে বল $\angle APC$ = কত ?
* আবার $\text{Sin } \alpha =$?
* অতএব PM = কত ?
* আবার AP, AB, $\angle ABP$ এবং $\angle APB$-র মধ্যে সম্পর্ক কি ?
* $AB = a$ বসালে এখন ঐ সম্পর্ক থেকে AP = কত হল ?
* PM = কত ?
* a, α, θ, ϕ-র মান জানা থাকলে অগম্য দূরত্বে অবস্থিত কোন বস্তুর উচ্চতা কত হবে ?

অভিযোজন : আজকের পাঠ ছাত্রীরা কতখানি আয়ত্ত করছে তা জানবার জন্য এই রকম প্রশ্ন করা হবে।

(১) আজকের পড়ায় যে বস্তুটির উচ্চতা নির্ণয় করতে হবে, তার বৈশিষ্ট্য কি ?

(২) APB ত্রিভুজ থেকে AP-র মান কত হবে ?

(৩) PM-র উচ্চতা কিভাবে নির্ণয় করা হ'ল ?

বাড়ীর কাজ ঃ আজকের পড়াটি ছাত্রীদের বাড়ী থেকে ভাল ভাবে তৈরী ক'রে আসতে ও ছবি দিয়ে এঁকে আনতে বলা হবে এবং নীচের সমস্যাটি সমাধান করে আনতে বলা হবে।

সমস্যা ঃ একটি পাহাড়ের ঠিক পূর্বে A বিন্দুতে পাহাড়টির উন্নতি কোণ 45° এবং A-র ঠিক দক্ষিণে B বিন্দুতে ঐ উন্নতি কোণ 30°। যদি AB = 500 মিঃ হয়, তবে পাহাড়ের উচ্চতা কত ?

প্রশ্নাবলী

Draw up notes of lesson on the following topics indicating the class for which your lesson is intended :

1. First lesson on the theory of Logarithms.

*2. First lesson on Recurring Decimals.

*3. To find the equation to the straight line which is inclined to x-axis at given angle and cuts off a given intercept from the y-axis.

4. To prove that the difference of the two sides of a triangle is less than the third side.

5. Simple Simultaneous Equations involving two unknowns.

6. To prove that the bisectors of the angle of a triangle are concurrent.

7. Ratio and Proportion.

8. The first lesson on decimal fractions.

9. The first lesson on the law of indices.

10. Construction of a triangle, when the base, the vertical angle and the length of the median which bisects the base are given.

*11. The first lesson on the measurements of heights and distances in trigonometry.

*12. The first lesson on Percentage.

13. The first lesson on the graphs on linear functions.

14. To prove that the straight line drawn through the middle point of a side of a triangle, parallel to the base, bisects the remaining side.

*15. Trigonometrical ratios of an angle of 30°.

16. Construction of a triangle—the perimeter and the angles at the base are given.

17. The Second lesson on quadratic equations.

18. First lesson on finding the number of permutations of 'n' different things taken 'r' at a time ($r<n$).

19. To prove that the angle at the centre of a circle is double of an angle at the circumference standing on the same arc.

20. To find the equation of the normal at the point (x, y) on the ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

21. Finding the equation of the normal to the parabola $y^2=4ax$ at the point (h, k) on it.

22. Extraction of square root in Arithmetic by the method of successive divisions.

23. To prove that the internal bisectors of a triangle meet at a point.

24. Finding out the H.C.F. of two numbers by the method of successive divisions.

25. To prove $\text{Cos}\,(A-B)=\text{Cos}\,A\,\text{Cos}\,B+\text{Sin}\,A\,\text{Sin}\,B$ where A and B are positive acute angles and A is greater than B.

26. To find the equation of the tangent to the circle $x^2+y^2=a^2$ at the point (p, q) on it.

27. To prove that the medians of a triangle meet at a point.

28. Finding out the area of a triangle formed by joining the points (x_1, y_1), (x_2, y_2) and (x_3, y_3).

29. First lesson on Profit and Loss in Arithmetic.

*30. To prove $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

*31. To prove $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
$=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

*32. To find out the area of a rectangle and a square.

*33. To find out the area of a circle.

*34. To prove that the two sides of a triangle is greater than the third side.

*35. To prove experimentally that the perpendicular distance is the shortest distance.

*36. To prove that the three angles of a triangle are together equal to two right angles.

*37. To prove $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

*38. Simple equation.

[পাঠ-টীকার নমুনার মধ্যে উপরের তারকাচিহ্নিত অংশগুলি করে দেওয়া আছে, বাকীগুলোর কয়েকটির সম্পর্কে কিছু ইঙ্গিত আছে বিভিন্ন বিষয়ের শিক্ষণ-পর্যায়ের অধ্যায়ের মধ্যে, আর অন্যান্যগুলো রাখা হ'য়েছে নিজেদের অভ্যাসের জন্য। অবশ্য পরবর্তী সংস্করণে আরো পাঠটীকা'র অন্তর্ভুক্ত করার ইচ্ছে আছে।]

———